الوحدة الرابعة
التكامل المحدد وتطبيقاته

٤ - ١ طرق التكامل

✸ مقدمة:

أذا كانت ص = د(س) فإن عملية التفاضل هى إيجاد المشتقة الأولى للدالة أى د′(س)

والعكس هو: إذا كان المعلوم هو المشتقة الأولى للدالة أى د′(س)

فإن عملية إيجاد الدالة الأصلية ص تسمى عملية التكامل أو المشتقة العكسية

أى أن:

د(س) ← تفاضل ← د′(س)

د′(س) ← تكامل ← د(س)

فمثلا:

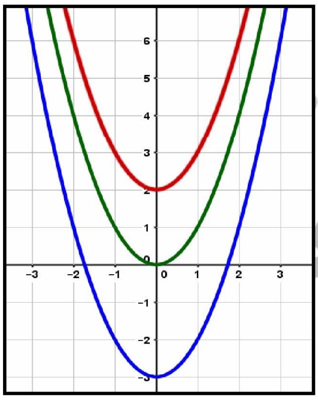
س^{٢} هى مشتقة عكسية للدالة ٢س

ونلاحظ أن س^{٢} ، س^{٢} + ١ ، س^{٢} − ٣ ، س^{٢} + ث حيث ث ∈ ع

كلها تمثل مشتقات عكسية للدالة ٢س وذلك لأن مشتقة كل منها ٢س

أى أن المشتقة العكسية تمثل مجموعة منحنيات تختلف عن بعضها فى الثابت

وميل المماس لأى منها متساوى لذلك فهى منحنيات متوازية كما هو موضح بالشكل



وقد إصطلح على تسمية مجموعة المشتقات العكسية للدالة د بالتكامل غير المحدد لهذه الدالة

ويرمز لها بالرمز ∫ د(س) ءس (ويقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س) ويكون:

$$\int د(س)\,ءس = ت(س) + ث$$

حيث ت′(س) = د(س)

✸ خواص التكامل غير المحدد:

إذا كان د ، ر دالتين لهما مشتقتان عكسيتان فى الفترة ف فإن:

١− ∫ أ د(س) ءس = أ ∫ د(س) ءس حيث أ ثابت ≠ ٠

٢− ∫ (د(س) ± ر(س)) ءس = ∫ د(س) ءس ± ∫ ر(س) ءس

✸ التفاضلات:

إذا كانت د دالة قابلة للإشتقاق حيث ص = د(س) فمن تعريف المشتقة الأولى نعلم أن:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س}) = \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$$

∴ عندما Δس ← ٠ فإن $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \to \text{د}'(\text{س})$

أى أن $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \simeq \text{د}'(\text{س})$ ∴ $\Delta \text{ص} \simeq \text{د}'(\text{س}) \Delta \text{س}$

تعريف:

لتكن د دالة قابلة للإشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س ، Δس يرمز للتغير فى س حيث $\Delta \text{س} \neq 0$ فإن:

١) تفاضلى ص ويرمز له بالرمز ءص = $\text{د}'(\text{س}) \Delta \text{س}$

٢) تفاضلى س ويرمز له بالرمز ءس = Δس

وبناء على ذلك يكون تفاضلى ص هو **ءص = د'(س) ءس** أو **ءص = ص' ءس**

أى أنه لإيجاد تفاضلى ص نوجد المشتقة الأولى بقواعد الإشتقاق ثم نضرب فى ءس

🕮 مثـــال:

أوجد تفاضلى كل من:

(أ) ص = $(٢\text{س} + ٥)^{٤}$ (ب) ص = $\text{هـ}^{٢\text{س}+٣}$ (جـ) ص = $\frac{\text{ع}}{\text{ل}}$ حيث ع، ل دوال فى المتغير س

✍ الحــــل:

(أ) ∵ ص = $(٢\text{س} + ٥)^{٤}$

∴ ءص = $٤(٢\text{س} + ٥)^{٣} \times ٢ \times \text{ءس} = ٨(٢\text{س} + ٥)^{٣} \text{ءس}$

(ب) ∵ ص = $\text{هـ}^{٢\text{س} + ٣}$

∴ ءص = $\text{هـ}^{٢\text{س} + ٣} \times ٢ \times \text{ءس} = ٢\text{هـ}^{٢\text{س} + ٣} \text{ءس}$

(جـ) ∵ ص = $\frac{\text{ع}}{\text{ل}}$

∴ ءص = $\frac{\text{ع}'\text{ل} - \text{ل}'\text{ع}}{\text{ل}^{٢}} \times \text{ءس} = \frac{\text{ل}(\text{ع}'\text{ءس}) - \text{ع}(\text{ل}'\text{ءس})}{\text{ل}^{٢}} = \frac{\text{ل ءع} - \text{ع ءل}}{\text{ل}^{٢}}$

لاحظ أن

ءل = ل' ءس

ءع = ع' ءس

✱ التكاملات الأساسية(القياسية):

لاتوجد طريقة عامة لإيجاد تكامل الدوال المختلفة تماثل طرق إيجاد مشتقات هذه الدوال وينحصر إيجاد تكامل أى دالة د فى البحث عن دالة تكون مشتقتها هى الدالة د لذلك يجب معرفة مشتقات الدوال السابق دراستها حتى يسهل إيجاد تكامل هذه الدوال

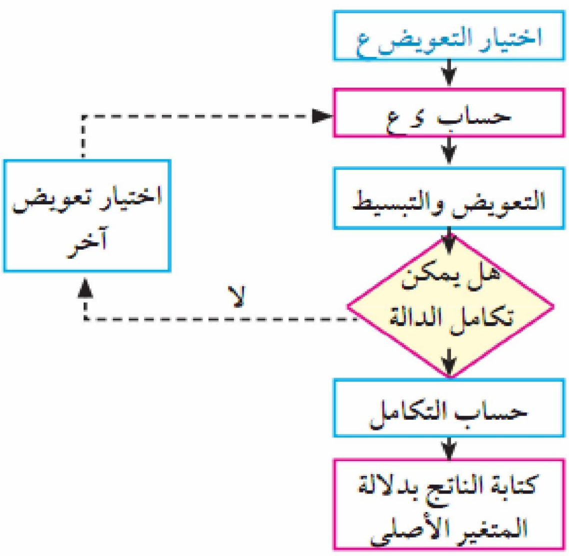
مشتقات الدوال الأساسية	التكاملات القياسية المناظرة
$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{\text{ن}}) = \text{ن س}^{\text{ن}-1}$	$\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث} \quad : \text{ن} \neq -1$
$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جاس}) = \text{جتاس}$	$\int \text{جتاس}\,\text{ءس} = \text{جاس} + \text{ث}$
$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جتاس}) = -\text{جاس}$	$\int \text{جاس}\,\text{ءس} = -\text{جتاس} + \text{ث}$
$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ظاس}) = \text{قا}^2\text{س}$	$\int \text{قا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظاس} + \text{ث}$
$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{هـ}^{\text{س}}$	$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$
$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{أ}^{\text{س}}) = \text{أ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$	$\int \text{أ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}} + \text{ث}$
$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$	$\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}\|\text{س}\| + \text{ث}$

✱ طرق التكامل:

حيث أنه لاتوجد طريقة عامة لإيجاد تكامل الدوال المختلفة لذلك توجد طرق مختلفة لأيجاد تكامل الدوال التى ليست على الصورة القياسية ندرس منها طريقتان هما: التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئ

اولا: التكامل بالتعويض:

من اهم طرق التكامل واكثرها استخداما لإيجاد تكامل الدوال التى ليست على الصورة القياسية ولاجراء عملية التكامل بالتعويض يتم الإستعانة بالمخطط المقابل:



ومع ملاحظة الآتى:

١) إذا كان التكامل على الصورة

$$\int \text{د}[\,\text{ر}(\text{س})\,]\,\text{ر}'(\text{س})\,\text{ءس}$$

نستخدم التعويض $\text{ع} = \text{ر}(\text{س})$

٢) إذا إحتوى التكامل على الجذر النونى لدالة أى $\sqrt[ن]{د(س)}$

نستخدم التعويض $د(س) = ع^{ن}$ أو $د(س) = ع$

مثـــال:

أوجد التكاملات الآتية: (أ) $\int ٣س\,(س^{٢} + ٣)^{٤}\,ءس$ (ب) $\int \frac{س^{٢}}{(س^{٣} - ٤)^{٥}}\,ءس$

الحـــل:

(أ) $\int ٣س\,(س^{٢} + ٣)^{٤}\,ءس$

بوضع $س^{٢} + ٣ = ع$ $\therefore ٢س\,ءس = ءع$ $\therefore ءس = \frac{ءع}{٢س}$

$$\therefore \int ٣س\,(س^{٢} + ٣)^{٤}\,ءس = \int ٣س\,(ع)^{٤}\,\frac{ءع}{٢س} = \frac{٣}{٢}\int ع^{٤}\,ءع$$

$$= \frac{٣}{٢} \times \frac{ع^{٥}}{٥} + ث = \frac{٣}{١٠}(س^{٢} + ٣)^{٥} + ث$$

(ب) $\int \frac{س^{٢}}{(س^{٣} - ٤)^{٥}}\,ءس = \int س^{٢}(س^{٣} - ٤)^{-٥}\,ءس$

بوضع $س^{٣} - ٤ = ع$ $\therefore ٣س^{٢}\,ءس = ءع$ $\therefore ءس = \frac{ءع}{٣س^{٢}}$

$$\therefore \int \frac{س^{٢}}{(س^{٣} - ٤)^{٥}}\,ءس = \int س^{٢}(س^{٣} - ٤)^{-٥}\,ءس = \int س^{٢}(ع)^{-٥}\,\frac{ءع}{٣س^{٢}} = \frac{١}{٣}\int ع^{-٥}\,ءع$$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{ع^{-٤}}{-٤} + ث = \frac{-١}{١٢}(س^{٣} - ٤)^{-٤} + ث = \frac{-١}{١٢(س^{٣} - ٤)^{٤}} + ث$$

مثـــال:

أوجد التكاملات الآتية: (أ) $\int س\,(٢س - ٣)^{٤}\,ءس$ (ب) $\int س^{٢}\,\sqrt[٣]{٣س^{٣} + ١}\,ءس$

الحـــل:

(أ) $\int س\,(٢س - ٣)^{٤}\,ءس$

بوضع $٢\text{س} - ٣ = \text{ع}$ $\quad \therefore \text{س} = \frac{\text{ع} + ٣}{٢}$ $\quad \therefore \text{ءس} = \frac{\text{ءع}}{٢}$

$$\therefore \int \text{س}(٢\text{س} - ٣)^{٤}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ع} + ٣}{٢}(\text{ع})^{٤}\frac{\text{ءع}}{٢} = \frac{١}{٤}\int (\text{ع}^{٥} + ٣\text{ع}^{٤})\,\text{ءع}$$

$$= \frac{١}{٤}\left(\frac{\text{ع}^{٦}}{٦} + \frac{٣\text{ع}^{٥}}{٥}\right) + \text{ث} = \frac{١}{٢٤}(٢\text{س} - ٣)^{٦} + \frac{٣}{٢٠}(٢\text{س} - ٣)^{٥} + \text{ث}$$

ب) $\int \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{٣\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

بوضع $٣\text{س} + ١ = \text{ع}^{٣}$ $\quad \therefore \text{س} = \frac{\text{ع}^{٣} - ١}{٣}$ $\quad \therefore \text{ءس} = \frac{٣\text{ع}^{٢}\text{ءع}}{٣} = \text{ع}^{٢}\text{ءع}$

$$\therefore \int \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{٣\text{س} + ١}\,\text{ءس} = \int \left(\frac{\text{ع}^{٣} - ١}{٣}\right)^{٢} \times \text{ع} \times \text{ع}^{٢}\,\text{ءع} = \frac{١}{٩}\int (\text{ع}^{٦} - ٢\text{ع}^{٣} + ١) \times \text{ع}^{٣}\,\text{ءع}$$

$$= \frac{١}{٩}\int (\text{ع}^{٩} - ٢\text{ع}^{٦} + \text{ع}^{٣})\,\text{ءع} = \frac{١}{٩}\left(\frac{\text{ع}^{١٠}}{١٠} - \frac{٢\text{ع}^{٧}}{٧} + \frac{\text{ع}^{٤}}{٤}\right) + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٩٠}(٣\text{س} + ١)^{\frac{١٠}{٣}} - \frac{٢}{٦٣}(٣\text{س} + ١)^{\frac{٧}{٣}} + \frac{١}{٣٦}(٣\text{س} + ١)^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$$

بعض قواعد التكامل التى سبق دراستها وتستخدم فى حل المسائل:

١− $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{١}{\text{أ}} \times \frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن} + ١}}{\text{ن} + ١} + \text{ث}$

تكامل قوس من الدرجة الأولى مرفوع لأس نقسم على معامل س و نزيد على الأس واحد و نقسم على الأس الجديد

٢− $\int [\text{د(س)}]^{\text{ن}}\,\text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \frac{[\text{د(س)}]^{\text{ن} + ١}}{\text{ن} + ١} + \text{ث}$

تكامل قوس مرفوع لأس مضروب فى مشتقة مابداخل القوس نزيد على اس القوس واحد و نقسم على الأس الجديد

٣− $\int \text{هـ}^{\text{د(س)}} \,.\, \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{د(س)}} + \text{ث}$

تكامل الدالة الأسية مرفوعة لأس × مشتقة الأس = الدالة الأسية مرفوعة لنفس الأس

٤− $\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د(س)}}\,\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{د(س)}| + \text{ث}$

تكامل البسط هو مشتقة المقام يساوى اللوغاريتم الطبيعى للقيمة المطلقة للمقام

مثـــال:

أوجد التكاملات الآتية: (أ) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{1-3\text{س}^2}}\,\text{ءس}$ (ب) $\int (3-\text{س})\,\text{هـ}^{6\text{س}-\text{س}^2}\,\text{ءس}$

الحـــل:

(أ) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{1-3\text{س}^2}}\,\text{ءس}$ $\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(1-3\text{س}^2) = -6\text{س}$

$\therefore \int \frac{\text{س}}{\sqrt{1-3\text{س}^2}}\,\text{ءس} = \frac{1}{-6}\int -6\text{س}\,(1-3\text{س}^2)^{\frac{-1}{2}}\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{-6} \times \frac{(1-3\text{س}^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{ث} = \frac{-1}{3}(1-3\text{س}^2)^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

(ب) $\int (3-\text{س})\,\text{هـ}^{6\text{س}-\text{س}^2}\,\text{ءس}$ $\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(6\text{س}-\text{س}^2) = 6-2\text{س}$

$\therefore \int (3-\text{س})\,\text{هـ}^{6\text{س}-\text{س}^2}\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\int (6-2\text{س})\,\text{هـ}^{6\text{س}-\text{س}^2}\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{6\text{س}-\text{س}^2} + \text{ث}$

مثـــال:

أوجد التكاملات الآتية: (أ) $\int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}+3}\,\text{ءس}$ (ب) $\int \frac{1}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2}\,\text{ءس}$

الحـــل:

(أ) $\int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}+3}\,\text{ءس}$

بوضع $\text{هـ}^{2\text{س}} + 3 = \text{ع}$ $\therefore 2\text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{ءس} = \text{ءع}$ $\therefore \text{ءس} = \frac{\text{ءع}}{2\text{هـ}^{2\text{س}}}$

$\therefore \int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}+3}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ءع}}{2\text{هـ}^{2\text{س}}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\text{ع}}\,\text{ءع}$

$= \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| + \text{ث} = \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{2\text{س}} + 3| + \text{ث}$

لاحظ انه يمكن ايجاد التكامل باستخدام قاعدة البسط مشتقة المقام

ب) $\int \frac{1}{س(لـو_{هـ} س)^{٢}} \, ءس$

بوضع لـو$_{هـ}$ س = ع $\therefore \frac{١}{س} ءس = ءع$ $\therefore ءس = س ءع$

$\therefore \int \frac{١}{س(لـو_{هـ} س)^{٢}} ءس = \int \frac{١}{س(ع)^{٢}} \times س ءع = \int ع^{-٢} ءع$

$= \frac{ع^{-١}}{-١} + ث = \frac{-١}{ع} + ث = \frac{-١}{لـو_{هـ} س} + ث$

ثانيا: التكامل بالتجزئ:

من التفاضل نعلم أنه إذا كانت ص، ع دالتين فى المتغير س وقابلتين للإشتقاق فإن:

$\frac{ء}{ءس}(ص ع) = ص \frac{ءع}{ءس} + ع \frac{ءص}{ءس}$

بتكامل الطرفين بالنسبة الى س

$\therefore \int \frac{ء}{ءس}(ص ع) ءس = \int ص \frac{ءع}{ءس} ءس + \int ع \frac{ءص}{ءس} ءس$

$\therefore ص ع = \int ص ءع + \int ع ءص$ $\therefore \int ص ءع = ص ع - \int ع ءص$

والمعادلة السابقة تسمى قاعدة التكامل بالتجزئ وتستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى وذلك بإختيار احدى الدالتين = ص والدلة الأخرى = ءع

ويجب مراعاة الآتى عند الإختيار:

١) نختار الدالة ص بحيث يكون من السهل إيجاد تفاضلها ويؤدى التفاضل إلى تبسيطها.

٢) نختار الدالة ءع بحيث يكون من السهل إيجاد تكاملها بقواعد التكامل السابقة.

ثم نطبق القاعدة السابقة كما سيتضح من خلال الأمثلة

مثـــال:

أوجد التكاملات الآتية: (أ) $\int س هـ^{-٢س} ءس$ (ب) $\int س^{٢} هـ^{س^{٣}+٣} ءس$

الحـــل:

(أ) $\int س هـ^{-٢س} ءس$

نفرض ان $ص = س$ ، $ءع = هـ^{-٢س} ءس$

$\therefore ءص = ءس$ ، $ع = \frac{-١}{٢} هـ^{-٢س}$

$\because \int ص ءع = ص ع - \int ع ءص$

$\therefore \int س هـ^{-٢س} ءس = س \times \frac{-١}{٢} هـ^{-٢س} - \int \frac{-١}{٢} هـ^{-٢س} \times ءس$

$= \frac{-١}{٢} س هـ^{-٢س} - \frac{-١}{٢} \times \frac{-١}{٢} هـ^{-٢س} + ث$

$= \frac{-١}{٢} س هـ^{-٢س} - \frac{١}{٤} هـ^{-٢س} + ث$

(ب) $\int س^٢ هـ^{س+٣} ءس$

نفرض ان $ص = س^٢$ ، $ءع = هـ^{س+٣} ءس$

$\therefore ءص = ٢س ءس$ ، $ع = هـ^{س+٣}$

$\because \int ص ءع = ص ع - \int ع ءص$

$\therefore \int س^٢ هـ^{س+٣} ءس = س^٢ هـ^{س+٣} - \int ٢س هـ^{س+٣} ءس$ بالتجزئ مرة أخرى

نفرض ان $ص = ٢س$ ، $ءع = هـ^{س+٣} ءس$

$\therefore ءص = ٢ءس$ ، $ع = هـ^{س+٣}$

$\therefore \int س^٢ هـ^{س+٣} ءس = س^٢ هـ^{س+٣} - ٢س هـ^{س+٣} + \int ٢هـ^{س+٣} ءس$

$= س^٢ هـ^{س+٣} - ٢س هـ^{س+٣} + ٢هـ^{س+٣} + ث$

مثال:

أوجد التكاملات الآتية: (أ) $\int لو_{هـ}(س+١) ءس$ (ب) $\int \frac{لو_{هـ} س}{\sqrt{س}} ءس$

الحل:

(أ) $\int لو_{هـ}(س+١) ءس$

نفرض ان $ص = لـو_هـ(س + ١)$ ، $ءع = ءس$

$\therefore ءص = \frac{١}{س + ١} ءس$ ، $ع = س$

$\therefore \int ص ءع = ص ع - \int ع ءص$

$\therefore \int لـو_هـ(س + ١) ءس = س لـو_هـ(س + ١) - \int \frac{س}{س + ١} ءس$

$= س لـو_هـ(س + ١) - \int \frac{س + ١ - ١}{س + ١} ءس = س لـو_هـ(س + ١) - \int (١ - \frac{١}{س + ١}) ءس$

$= س لـو_هـ(س + ١) - س + لـو_هـ(س + ١) + ث$

(ب) $\int \frac{لـو_هـ س}{\sqrt{س}} ءس = لـو_هـ س \times س^{\frac{-١}{٢}} ءس$

نفرض ان $ص = لـو_هـ س$ ، $ءع = س^{\frac{-١}{٢}} ءس$

$\therefore ءص = \frac{١}{س} ءس$ ، $ع = ٢س^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \int ص ءع = ص ع - \int ع ءص$

$\therefore \int \frac{لـو_هـ س}{\sqrt{س}} ءس = ٢س^{\frac{١}{٢}} لـو_هـ س - \int ٢س^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س} ءس$

$= ٢س^{\frac{١}{٢}} لـو_هـ س - ٢ \int س^{\frac{-١}{٢}} ءس = ٢س^{\frac{١}{٢}} لـو_هـ س - ٤س^{\frac{١}{٢}} + ث$

مثـــال:

أوجد التكاملات الآتية: (أ) $\int \frac{٣س + ٥}{هـ^{٢س}} ءس$ (ب) $\int \frac{س}{\sqrt{٢س + ٣}} ءس$

الحـــل:

(أ) $\int \frac{٣س + ٥}{هـ^{٢س}} ءس = (٣س + ٥) هـ^{-٢س} ءس$

نفرض ان $ص = ٣س + ٥$ ، $ءع = هـ^{-٢س} ءس$

$\therefore ءص = ٣ءس$ ، $ع = \frac{-١}{٢} هـ^{-٢س}$

$$\therefore \int \frac{\text{٣س} + ٥}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}\,\text{ءس} = (\text{٣س} + ٥) \times \frac{-١}{٢}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} - \int \frac{-١}{٢}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} \times ٣\,\text{ءس}$$

$$= \frac{-١}{٢}(\text{٣س} + ٥)\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} + \frac{٣}{٢}\int \text{هـ}^{-\text{٢س}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{-١}{٢}(\text{٣س} + ٥)\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} - \frac{٣}{٤}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} + \text{ث}$$

$$= \frac{-(\text{٣س} + ٥)}{٢\,\text{هـ}^{\text{٢س}}} - \frac{٣}{٤\,\text{هـ}^{\text{٢س}}} + \text{ث}$$

(ب) $$\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{٢س} + ٣}}\,\text{ءس} = \int \text{س}(\text{٢س} + ٣)^{\frac{-١}{٢}}\,\text{ءس}$$

نفرض ان $\text{ص} = \text{س}$ ، $\text{ءع} = (\text{٢س} + ٣)^{\frac{-١}{٢}}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءص} = \text{ءس}$ ، $\text{ع} = \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{٢س} + ٣)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} = (\text{٢س} + ٣)^{\frac{١}{٢}}$

$$\because \int \text{ص}\,\text{ءع} = \text{ص}\,\text{ع} - \int \text{ع}\,\text{ءص}$$

$$\therefore \int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{٢س} + ٣}}\,\text{ءس} = \text{س}(\text{٢س} + ٣)^{\frac{١}{٢}} - \int (\text{٢س} + ٣)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$$

$$= \text{س}(\text{٢س} + ٣)^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{٢س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

$$= \text{س}(\text{٢س} + ٣)^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٣}(\text{٢س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

ملاحظات هامة جدا:

١) أذا وجدت دالة كثيرة حدود مضروبة فى دالة جبرية (تحتوى على جذر)
نضع الدالة كثيرة الحدود = ص (نفاضلها) ونضع الدالة الجبرية = ءع (نكاملها)

٢) أذا وجدت دالة كثيرة حدود مضروبة فى دالة أسية
نضع الدالة كثيرة الحدود = ص (نفاضلها) ونضع الدالة لأسية = ءع (نكاملها)

٣) أذا وجدت دالة كثيرة حدود مضروبة فى دالة لوغاريتمية
نضع الدالة اللوغاريتمية = ص (نفاضلها) ونضع الدالة كثيرة الحدود = ءع (نكاملها)

بعض تطبيقات التكامل غير المحدد:

إذا كانت الدالة $د'$ هى ميل المماس (أو دالة هامش الربح أو معدل تغير دالة) فإنه يمكن ايجاد معادلة الدالة باستخدام التكامل غير المحدد حيث يكون $د(س) = \int د'(س)\, ءس$

وحيث أن التكامل لايعطى دالة واحدة حيث أنه يحتوى على ثابت يمكن أن يأخذ اى قيمة وللحصول على منحنى محدد يجب تحديد ثابت التكامل عن طريق بعض الشروط الإضافية (تسمى الشروط الإبتدائية)

مثـــال:

أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (٠، ١) والذى ميل المماس له عند أى نقطة (س، ص) واقعة عليه يساوى $س\sqrt{س^٢+١}$

الحـــل:

$\because$ ميل المماس $= س\sqrt{س^٢+١}$ $\quad\therefore د'(س) = س\sqrt{س^٢+١}$

$\therefore د(س) = \int د'(س)\, ءس = \int س\sqrt{س^٢+١}\, ءس = \frac{١}{٢}\int ٢س(س^٢+١)^{\frac{١}{٢}} ءس$ (دالة × مشتقتها)

$\therefore د(س) = \frac{١}{٢} \times \frac{(س^٢+١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث \quad \Leftarrow \quad \therefore د(س) = \frac{١}{٣}(س^٢+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$\because$ المنحنى يمر بالنقطة (٠، ١) $\therefore$ هى تحقق معادلته

$\therefore ١ = \frac{١}{٣}(٠+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث \qquad \therefore ١ = \frac{١}{٣} + ث \qquad \therefore ث = \frac{٢}{٣}$

$\therefore$ معادلة المنحنى هى $\boxed{د(س) = \frac{١}{٣}(س^٢+١)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٣}}$

مثـــال:

أوجد معادلة المنحنى $ص = د(س)$ إذا كان $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = أس + ب$ حيث أ، ب ثابتان وللمنحنى نقطة إنقلاب عند النقطة (٠، ٢) وقيمة صغرى محلية عند النقطة (١، ٠) ثم أوجد القيمة العظمى المحلية

الحـــل:

$\because$ (٠، ٢) نقطة إنقلاب للمنحنى $\quad \therefore \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٠$ عند $س = ٠$

∴ أ × ٠ + ب = ٠ ∴ ب = ٠ ∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = أس

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ∫ أس ءس = $\frac{١}{٢}$ أس^٢ + جـ

∵ (١ ، ٠) قيمة صغرى محلية ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ عند س = ١

∴ $\frac{١}{٢}$ أ × ١^٢ + جـ = ٠ ∴ جـ = − $\frac{١}{٢}$ أ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢}$ أس^٢ − $\frac{١}{٢}$ أ

∴ ص = ∫ ($\frac{١}{٢}$ أس^٢ − $\frac{١}{٢}$ أ) ءس ∴ ص = $\frac{١}{٦}$ أس^٣ − $\frac{١}{٢}$ أس + ء

∵ (٠ ، ٢) ، (١ ، ٠) نقطتان على المنحنى ∴ د(٠) = ٢ ، د(١) = ٠

∴ ٢ = $\frac{١}{٦}$ أ × ٠ − $\frac{١}{٢}$ أ × ٠ + ء ∴ ء = ٢

∴ ٠ = $\frac{١}{٦}$ أ × ١^٣ − $\frac{١}{٢}$ أ × ١ + ٢ ∴ ٢أ = ١٢ ∴ أ = ٦

∴ معادلة المنحنى هى: **ص = س^٣ − ٣س + ٢**

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^٢ − ٣ ، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٦س

لإيجاد القيمة العظمى نوجد النقط الحرجة بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ ٣س^٢ − ٣ = ٠ ∴ ٣(س − ١)(س + ١) = ٠ ∴ س = ١ أو س = −١

عند س = ١ ∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٦ × ١ = ٦ > ٠ ∴ د(١) قيمة صغرى

عند س = −١ ∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٦ × −١ = −٦ < ٠ ∴ د(−١) قيمة عظمى

∴ د(−١) = (−١)^٣ − ٣(−١) + ٢ = −١ + ٣ + ٢ = ٤ ∴ القيمة العظمى = ٤

مثـــال:

إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) يعطى بالعلاقة د̸(س) = $\frac{س هـ^{س}}{(س + ١)^٢}$

فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (١ ، ٢هـ)

الحـــل:

∵ ميل المماس $= \text{د}'(\text{س}) = \dfrac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}$

∴ $\text{د}(\text{س}) = \int \dfrac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس} = \int \text{س هـ}^{\text{س}}(\text{س}+١)^{-٢}\,\text{ءس}$

نفرض ان $\text{ص} = \text{س هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ءع} = (\text{س}+١)^{-٢}\,\text{ءس}$

∴ $\text{ءص} = (\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ءس}$ ، $\text{ع} = \dfrac{(\text{س}+١)^{-١}}{-١} = \dfrac{-١}{\text{س}+١}$

∵ $\int \text{ص ءع} = \text{ص ع} - \int \text{ع ءص}$

∴ $\text{د}(\text{س}) = \int \dfrac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس} = \dfrac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} - \int \dfrac{-١}{\text{س}+١}(\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ءس}$

∴ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \int \dfrac{١}{\cancel{\text{س}+١}}\cancel{(\text{س}+١)}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

∴ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$ ∴ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

∴ $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}\left(\dfrac{-\text{س}+\text{س}+١}{\text{س}+١}\right) + \text{ث}$ ∴ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \text{ث}$

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١، ٢هـ)

∴ $٢\text{هـ} = \dfrac{\text{هـ}}{١+١} + \text{ث}$ ∴ $\text{ث} = ٢\text{هـ} - \dfrac{١}{٢}\text{هـ} = \dfrac{٣}{٢}\text{هـ}$

∴ معادلة المنحنى هى: $\boxed{\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \dfrac{٣}{٢}\text{هـ}}$

٤ - ٢ تكامل الدوال المثلثية

✱ تكامل بعض الدوال المثلثية (الصور القياسية):

تكامل أى دالة د ينحصر فى إيجاد المشتقة العكسية ت التى إذا أوجدنا مشتقها الأولى لنتجت الدالة د

أى أن د(س) = $\frac{ى}{ىس}$ [ت(س)] وبالتالى فإن $\int$ د(س)ىس = ت(س) + ث

وقد سبق أن درسنا مشتقة الدوال المثلثية وكانت كالآتى:

١ - $\frac{ى}{ىس}$ (جاس) = جتاس

٢ - $\frac{ى}{ىس}$ (جتاس) = − جاس

٣ - $\frac{ى}{ىس}$ (ظاس) = قا^{٢}س

٤ - $\frac{ى}{ىس}$ (قتاس) = − قتاس ظتاس

٥ - $\frac{ى}{ىس}$ (قاس) = قاس ظاس

٦ - $\frac{ى}{ىس}$ (ظتاس) = − قتا^{٢}س

وباستخدام مفهوم المشتقة العكسية يمكن استنتاج تكامل بعض الدوال المثلثية كالآتى:

١ - $\int$ جاس ىس = − جتاس + ث

٢ - $\int$ جتاس ىس = جاس + ث

٣ - $\int$ قا^{٢}س ىس = ظاس + ث

٤ - $\int$ قتاس ظتاس ىس = − قتاس + ث

٥ - $\int$ قاس ظاس ىس = قاس + ث

٦ - $\int$ قتا^{٢}س ىس = − ظتاس + ث

نتائج:

١ - $\int$ جا(أس + ب)ىس = − $\frac{١}{أ}$ جتا(أس + ب) + ث

٢ - $\int$ جتا(أس + ب)ىس = $\frac{١}{أ}$ جا(أس + ب) + ث

وبالمثل لباقى التكاملات السابقة

أى أنه إذا كان مع الدالة المثلثية فى الصور القياسية السابقة زاوية من الدرجة الأولى نقسم على معامل الزاوية ثم نكامل الدالة المثلثية

علاقات هامة:

❶ $جا^2س + جتا^2س = 1$ ومنها $جا^2س = 1 - جتا^2س$ ، $جتا^2س = 1 - جا^2س$

❷ $1 + ظا^2س = قا^2س$ ومنها $ظا^2س = قا^2س - 1$

❸ $1 + ظتا^2س = قتا^2س$ ومنها $ظتا^2س = قتا^2س - 1$

❹ $2جاس\ جتاس = جا2س$

❺ $جتا^2س - جا^2س = جتا2س$

ومنها $جا^2س = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}جتا2س$ ، $جتا^2س = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}جتا2س$

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int (جاس + قا^2س)\ ءس$

(ب) $\int قاس(جتا^2س + ظاس)\ ءس$

(جـ) $\int قتاس(ظتاس - قتاس)\ ءس$

(د) $\int \frac{جتا^2س}{1 - جاس}\ ءس$

الحـــل:

(أ) $\int (جاس + قا^2س)\ ءس = \int جاس ءس + \int قا^2س\ ءس = -جتاس + ظاس + ث$

(ب) $\int قاس(جتا^2س + ظاس)\ ءس = \int (قاس جتا^2س + قاس ظاس)\ ءس$

$= \int جتاس ءس + \int قاس ظاس\ ءس = جاس + قاس + ث$

(جـ) $\int قتاس(ظتاس - قتاس)ءس = \int قتاس ظتاس ءس - \int قتا^2س\ ءس = -قتاس + ظتاس + ث$

(د) $\int \frac{جتا^2س}{1 - جاس}\ ءس = \int \frac{1 - جا^2س}{1 - جاس}\ ءس$ من قوانين المثلثات $جا^2س + جتا^2س = 1$

$= \int \frac{(1 + جاس)(1 - جاس)}{1 - جاس}\ ءس = \int (1 + جاس)ءس = س - جتاس + ث$

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int$ (جا٣س − قا^{٢} ٢س) ءس

(ب) $\int$ ٦قا٢س(ظا٢س + جتا^{٢} ٢س) ءس

(جـ) $\int$ [١ + ظتا^{٢}(٣س − ١)] ءس

(د) $\int \frac{\text{جا}^{٢}(٢س − ٣)}{١ − \text{جتا}(٢س − ٣)}$ ءس

الحـــل:

(أ) $\int$ (جا٣س − قا^{٢} ٢س) ءس = $\int$ جا٣س ءس − $\int$ قا^{٢} ٢س ءس

= $\frac{-١}{٣}$ جتا٣س − $\frac{١}{٢}$ ظا٢س + ث

(ب) $\int$ ٦قا٢س(ظا٢س + جتا^{٢} ٢س) ءس = ٦ $\int$ قا٢س ظا٢س ءس + ٦ $\int$ قا٢س جتا^{٢} ٢س ءس

= ٦ × $\frac{١}{٢}$ قا٢س + ٦ $\int$ جتا٢س ءس = ٣ قا٢س + ٣جا٢س + ث

(جـ) $\int$ [١ + ظتا^{٢}(٣س − ١)] ءس = $\int$ قتا^{٢}(٣س − ١) ءس = $\frac{-١}{٣}$ ظتا^{٢}(٣س − ١) + ث

(د) $\int \frac{\text{جا}^{٢}(٢س − ٣)}{١ − \text{جتا}(٢س − ٣)}$ ءس = $\int \frac{١ − \text{جتا}^{٢}(٢س − ٣)}{١ − \text{جتا}(٢س − ٣)}$ ءس

= $\int \frac{[١ + \text{جتا}(٢س − ٣)]\,[١ − \text{جتا}(٢س − ٣)]}{١ − \text{جتا}(٢س − ٣)}$ ءس

= $\int$ ءس + $\int$ جتا(٢س − ٣) ءس = س + $\frac{١}{٢}$ جا(٢س − ٣) + ث

ملاحظة هامة:

سبق ان درسنا القواعد الآتية:

١− $\int$ [د(س)]^{ن} د′(س) ءس = $\frac{[\text{د(س)}]^{ن+١}}{ن+١}$ + ث (دالة × مشتقتها)

٢− $\int \frac{\text{د}'(س)}{\text{د(س)}}$ ءس = لـو$_{هـ}$|د(س)| + ث (البسط مشتقة المقام)

وباستخدام هذه العلاقات يمكن إيجاد تكامل الدوال المثلثية الغير قياسية

مثال:

أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int \text{ظاس}\ \text{ءس}$ (ب) $\int \text{ظتاس}\ \text{ءس}$ (ج) $\int \text{قاس}\ \text{ءس}$ (د) $\int \text{قتاس}\ \text{ءس}$

الحل:

(أ) $\int \text{ظاس}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس} = -\int \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$ (البسط مشتقة المقام)

$\therefore \int \text{ظاس}\ \text{ءس} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{ث} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}|^{-1} + \text{ث} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس}| + \text{ث}$

حل آخر بضرب البسط والمقام فى قاس

$\therefore \int \text{ظاس}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{ظاس قاس}}{\text{قاس}}\ \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس}| + \text{ث}$

$$\therefore \int \text{ظاس}\ \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس}| + \text{ث}$$

(ب) $\int \text{ظتاس}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\ \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{ث}$

حل آخر بضرب البسط والمقام فى قتاس

$\therefore \int \text{ظتاس}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{ظتاس قتاس}}{\text{قتاس}}\ \text{ءس} = -\int \frac{-\text{ظتاس قتاس}}{\text{قتاس}}\ \text{ءس}$

$\therefore \int \text{ظتاس}\ \text{ءس} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قتاس}| + \text{ث} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قتاس}|^{-1} + \text{ث} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{ث}$

$$\therefore \int \text{ظتاس}\ \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{ث}$$

(ج) $\int \text{قاس}\ \text{ءس}$ بضرب البسط والمقام فى قاس + ظاس

$\therefore \int \text{قاس}\ \text{ءس} = \int \text{قاس} \times \frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{قا}^2\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\ \text{ءس}$

$$\therefore \int \text{قاس}\ \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} + \text{ظاس}| + \text{ث}$$

(د) $\int \text{قتاس}\ \text{ءس}$ بضرب البسط والمقام فى قتاس + ظتاس

$\therefore \int \text{قتاس}\ \text{ءس} = \int \text{قتاس} \times \frac{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{قتا}^2\text{س} + \text{قتاس ظتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\ \text{ءس}$

$$= -\int \frac{-\text{قتا}^2\text{س} - \text{قتاس ظتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\,\text{ءس} = -\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{قتاس} + \text{ظتاس}\right| + \text{ث}$$

$$\therefore \int \text{قتاس ءس} = -\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{قتاس} + \text{ظتاس}\right| + \text{ث}$$

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int \text{جاس جتاس ءس}$ (ب) $\int (\text{جاس} - \text{جتاس})^2\,\text{ءس}$

(جـ) $\int \text{جتا}^3\text{س جاس ءس}$ (د) $\int \text{س}^2\,\text{جتا}(\text{س}^3 + 5)\,\text{ءس}$

الحـــل:

(أ) $\int \text{جاس جتاس ءس}$ $\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جاس}) = \text{جتاس}$

لاحظ أن التكامل عبارة عن دالة مثلثية × مشتقة الدالة المثلثية فيكون الناتج هو زيادة أس الدالة المثلثية بواحد ونقسم على الأس الجديد

$$\therefore \int \text{جاس جتاس ءس} = \frac{\text{جا}^2\text{س}}{2} + \text{ث} = \frac{1}{2}\text{جا}^2\text{س} + \text{ث}$$

(ب) $\int (\text{جاس} - \text{جتاس})^2\,\text{ءس}$ **بفك القوس**

$$\therefore \int (\text{جاس} - \text{جتاس})^2\,\text{ءس} = \int (\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} - 2\,\text{جاس جتاس})\,\text{ءس}$$

$$= \int (1 - \text{جا}2\text{س})\,\text{ءس} = \text{س} + \frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س} + \text{ث}$$

(جـ) $\int \text{جتا}^3\text{س جاس ءس}$ $\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{جتاس}) = -\text{جاس}$

$$\therefore \int \text{جتا}^3\text{س جاس ءس} = -\int \text{جتا}^3\text{س}\,(-\text{جاس})\,\text{ءس}$$

لاحظ أن التكامل أصبح عبارة عن دالة مثلثية × مشتقة الدالة المثلثية فيكون الناتج هو زيادة أس الدالة المثلثية بواحد ونقسم على الأس الجديد

$$\therefore \int \text{جتا}^3\text{س جاس ءس} = -\int \text{جتا}^3\text{س}\,(-\text{جاس})\,\text{ءس} = -\frac{1}{4}\text{جتا}^4\text{س} + \text{ث}$$

(د) $\int \text{س}^{٢} \text{جتا}(\text{س}^{٣}+٥)\,\text{ءس}$ $\qquad \because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{٣}+٥) = ٣\text{س}^{٢}$

$\therefore \int \text{س}^{٢} \text{جتا}(\text{س}^{٣}+٥)\,\text{ءس} = \frac{١}{٣}\int ٣\text{س}^{٢} \text{جتا}(\text{س}^{٣}+٥)\,\text{ءس}$

لاحظ أن التكامل أصبح عبارة عن دالة مثلثية × مشتقة زاويتها فيكون الناتج هو تكامل الدالة المثلثية

$\therefore \int \text{س}^{٢} \text{جتا}(\text{س}^{٣}+٥)\,\text{ءس} = \frac{١}{٣}\int ٣\text{س}^{٢} \text{جتا}(\text{س}^{٣}+٥)\,\text{ءس} = \frac{١}{٣}\text{جا}(\text{س}^{٣}+٥)+\text{ث}$

ملاحظة:

يمكن حل المثال السابق باستخدام طريقة التعويض (حاول بنفسك)

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int \frac{\text{قاس ظاس}}{\text{قاس}-١}\,\text{ءس}$ $\qquad$ (ب) $\int \text{ظتا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس}$

(جـ) $\int \frac{١-\text{جا٢س}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\,\text{ءس}$ $\qquad$ (د) $\int \text{س جاس}\,\text{ءس}$

الحـــل:

(أ) $\int \frac{\text{قاس ظاس}}{\text{قاس}-١}\,\text{ءس}$ $\qquad \because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{قاس}-١) = \text{قاس ظاس}$ $\qquad$ ∴ البسط مشتقة المقام

$\therefore \int \frac{\text{قاس ظاس}}{\text{قاس}-١}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس}-١|+\text{ث}$

(ب) $\int \text{ظتا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس} = \int \text{ظتاس ظتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} = \int \text{ظتاس}(\text{قتا}^{٢}\text{س}-١)\,\text{ءس}$

$= \int \text{ظتاس قتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} - \int \text{ظتاس}\,\text{ءس}$

$= -\int \text{ظتاس}(-\text{قتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس} - \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{ءس}$

$= \frac{-١}{٢}\text{ظتا}^{٢}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}|+\text{ث}$

(جـ) $\int \frac{١-\text{جا٢س}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}+\text{جتا}^{٢}\text{س}-٢\text{جاس جتاس}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}-٢\text{جاس جتاس}+\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

تذكر أن

$\text{جا}^{٢}\text{س}+\text{جتا}^{٢}\text{س} = ١$

$\text{جا٢س} = ٢\text{جاس جتاس}$

$= \int \frac{(\text{جاس} - \text{جتاس})^2}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\,\text{ءس} = \int (\text{جاس} - \text{جتاس})\,\text{ءس} = -\text{جتاس} - \text{جاس} + \text{ث}$

(د) $\int \text{س جاس ءس}$ التكامل لايمثل دالة × مشتقتها لذلك يحل بطريقة التجزئ

نفرض ان ص = س ، ءع = جاس ءس

∴ ءص = ءس ، ع = − جتاس

∵ $\int \text{ص ءع} = \text{ص ع} - \int \text{ع ءص}$

∴ $\int \text{س جاس ءس} = -\text{س جتاس} + \int \text{جتاس ءس} = -\text{س جتاس} + \text{جاس} + \text{ث}$

مثال:

أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة (١ ، −٢) والذى ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه هو

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\pi \,\text{جتا}\,\pi\text{س} - ٢\pi\,\text{جا}\,\pi\text{س}$

الحل:

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\pi \,\text{جتا}\,\pi\text{س} - ٢\pi\,\text{جا}\,\pi\text{س}$

∴ $\text{د(س)} = \int (٣\pi\,\text{جتا}\,\pi\text{س} - ٢\pi\,\text{جا}\,\pi\text{س})\,\text{ءس} = ٣\pi\,\frac{\text{جا}\,\pi\text{س}}{\pi} - ٢\pi\,\frac{-\text{جتا}\,\pi\text{س}}{\pi} + \text{ث}$

∴ $\text{د(س)} = ٣\text{جا}\,\pi\text{س} + ٢\text{جتا}\,\pi\text{س} + \text{ث}$ ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، −٢)

∴ $-٢ = ٣\text{جا}\,\pi + ٢\text{جتا}\,\pi + \text{ث}$ ∴ $-٢ = ٠ - ٢ + \text{ث}$ ∴ ث = ٠

∴ معادلة المنحنى هى: $\boxed{\text{د(س)} = ٣\text{جا}\,\pi\text{س} + ٢\text{جتا}\,\pi\text{س} + \text{ث}}$

مثال:

منحنى ميل المماس له عند أى نقطة يساوى $-\text{أقتا}^2\text{س}$ حيث أ ثابت فإذا كان المنحنى يمر بالنقطتين $(\frac{\pi}{٤} ، ٥)$ ، $(\frac{٣\pi}{٤} ، ١)$ فأوجد معادلة المنحنى

الحل:

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{أقتا}^2\text{س}$ ∴ $\text{د(س)} = \int -\text{أقتا}^2\text{س ءس} = -\text{أ}\int \text{قتا}^2\text{س ءس}$

∴ $د(س) = أ ظتاس + ث$

∵ المنحنى يمر بالنقطتين $(\frac{\pi}{4} ، 5)$ ، $(\frac{3\pi}{4} ، 1)$

∴ $5 = أ ظتا\frac{\pi}{4} + ث$ ∴ $أ + ث = 5$ (1)

، $1 = أ ظتا\frac{3\pi}{4} + ث$ ∴ $-أ + ث = 1$ (2)

بجمع (1) ، (2) ∴ $2ث = 6$ ∴ $ث = 3$ بالتعويض فى (1) ∴ $أ = 2$

∴ معادلة المنحنى هى: $د(س) = 2 ظتاس + 3$

مثـــال:

أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة $(\frac{\pi}{2} ، \frac{\pi^2}{4} + 9)$ إذا كان ميل المماس له عند أى نقطة (س ، ص)

عليه يعطى بالعلاقة $م = 2س + \frac{1}{2} قا^2 \frac{س}{2}$

الحـــل:

∵ ميل المماس $م = 2س + \frac{1}{2} قا^2 \frac{س}{2}$

∴ $د(س) = \int (2س + \frac{1}{2} قا^2 \frac{س}{2}) ءس = س^2 + \frac{1}{2} \times \frac{ظا \frac{س}{2}}{\frac{1}{2}} + ث$

∴ $د(س) = س^2 + ظا\frac{س}{2} + ث$ ∵ المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{2} ، \frac{\pi^2}{4} + 9)$

∴ $\frac{\pi^2}{4} + 9 = \frac{\pi^2}{4} + ظا\frac{\pi}{4} + ث$ ∴ $9 = 1 + ث$ ∴ $ث = 8$

∴ معادلة المنحنى هى: $د(س) = س^2 + ظا\frac{س}{2} + 8$

٤ - ٣ التكامل المحدد

✸ النظرية الأساسية فى التفاضل:

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [؟ ، ب]، وكانت ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة فإن: $\int_{؟}^{ب} د(س)\,ءس = ت(ب) - ت(؟)$

ملاحظات:

١) يسمى $\int_{؟}^{ب} د(س)\,ءس$ بالتكامل المحدد ويقرأ تكامل د(س) بالنسبة إلى س من ؟ إلى ب

وهو عدد حقيقى تتوقف قيمته على:

- الحدان السفلى والعلوى للتكامل المحدد أى العددين ؟، ب على الترتيب
- قاعدة الدالة د

٢) رمز المتغير س يمكن استبداله بأى رمز آخر دون أن يؤثر ذلك على قيمة التكامل المحدد أى أن

$$\int_{؟}^{ب} د(س)\,ءس = \int_{؟}^{ب} د(ص)\,ءص = \int_{؟}^{ب} د(ع)\,ءع = \dots$$

٣) يعبر عن ت(ب) – ت(؟) بالصورة $\left[ت(س)\right]_{؟}^{ب}$ أو $ت(س)\Big|_{؟}^{ب}$

٤) التكامل المحدد نحصل عليه بإيجاد التكامل غير المحدد مع إهمال ثابت التكامل ثم التعويض عن المتغير بحدى التكامل

٥) تطبق جميع قواعد التكامل غير المحدد وجدول التكاملات القياسية وذلك عند إيجاد قيمة التكامل المحدد لدالة متصلة

مثال: أوجد قيمة كل ممايأتى:

(؟) $\int_{-١}^{٢} (٢س + ٣)\,ءس$ (ب) $\int_{٠}^{٥} \frac{٣}{\sqrt{ن + ٤}}\,ءن$ (جـ) $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا\theta\,ء\theta$

الحــل:

(؟) $\int_{-١}^{٢} (٢س + ٣)\,ءس = \left[س^{٢} + ٣س\right]_{-١}^{٢}$

$= (٢^{٢} + ٣ \times ٢) - ((-١)^{٢} + ٣ \times (-١)) = ١٠ + ٢ = ١٢$

ب) $\int_{0}^{5} \frac{3}{\sqrt{ن+4}} \, ءن = 3 \times \int_{0}^{5} (ن+4)^{-\frac{1}{2}} \, ءن = \left[6(ن+4)^{\frac{1}{2}} \right]_{0}^{5}$

$= 6(5+4)^{\frac{1}{2}} - 6(0+4)^{\frac{1}{2}} = 18 - 12 = 6$

جـ) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} جتا\theta \, ء\theta = \left[جا\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = جا\frac{\pi}{2} - جا\frac{-\pi}{2} = 1 - (-1) = 2$

نظرية: إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة

خواص التكامل المحدد:

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] ، جـ ∈]أ ، ب[فإن:

1) $\int_{أ}^{ب} د(س) ءس = - \int_{ب}^{أ} د(س) ءس$ 2) $\int_{أ}^{أ} د(س) ءس = صفر$

3) $\int_{أ}^{ب} د(س) ءس = \int_{أ}^{جـ} د(س) ءس + \int_{جـ}^{ب} د(س) ءس$

مثـــال:

إذا كانت د دالة متصلة على ح وكان $\int_{-1}^{4} د(س) ءس = 255$ ، $\int_{2}^{-1} د(س) ءس = -15$

فاوجد $\int_{2}^{4} د(س) ءس$

الحـــل:

∵ $\int_{-1}^{4} د(س) ءس = \int_{-1}^{2} د(س) ءس + \int_{2}^{4} د(س) ءس$

، $\int_{-1}^{4} د(س) ءس = - \int_{2}^{-1} د(س) ءس + \int_{2}^{4} د(س) ءس$

∴ $255 = -(-15) + \int_{2}^{4} د(س) ءس$ ∴ $\int_{2}^{4} د(س) ءس = 255 - 15 = 240$

مثـــال:

إذا كان $د(س) = \begin{cases} ٢س + س^٢ & : س < ٠ \\ ٢س - س^٢ & : س \geq ٠ \end{cases}$ أوجد $\int_{-١}^{٣} د(س) \, ءس$

الحـــل:

$\because$ د(س) متصلة عند س = ٠ لأن $د(٠) = د(٠^+) = د(٠^-)$

$\therefore \int_{-١}^{٣} د(س)\,ءس = \int_{-١}^{٠} د(س)\,ءس + \int_{٠}^{٣} د(س)\,ءس$

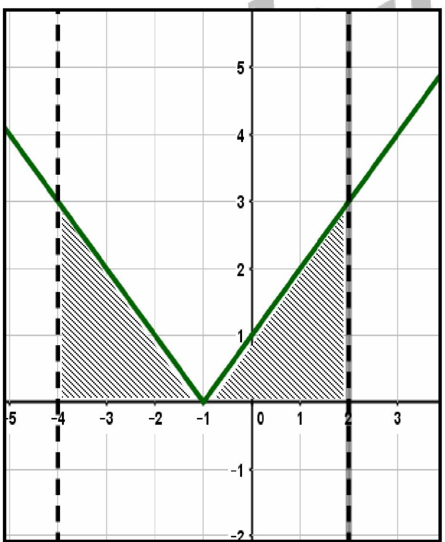
$= \int_{-١}^{٠} (٢س + س^٢)\,ءس + \int_{٠}^{٣} (٢س - س^٢)\,ءس$

$= \left[س^٢ + \frac{١}{٣} س^٣ \right]_{-١}^{٠} + \left[س^٢ - \frac{١}{٣} س^٣ \right]_{٠}^{٣}$

$= (٠) - (١ - \frac{١}{٣}) + (٩ - ٩) - (٠) = \frac{-٢}{٣}$

مثـــال: أوجد قيمة كل ممايأتى:

(أ) $\int_{-٤}^{٢} |س + ١|\,ءس$ (ب) $\int_{-٣}^{٣} |س^٢ - ٤|\,ءس$



الحـــل:

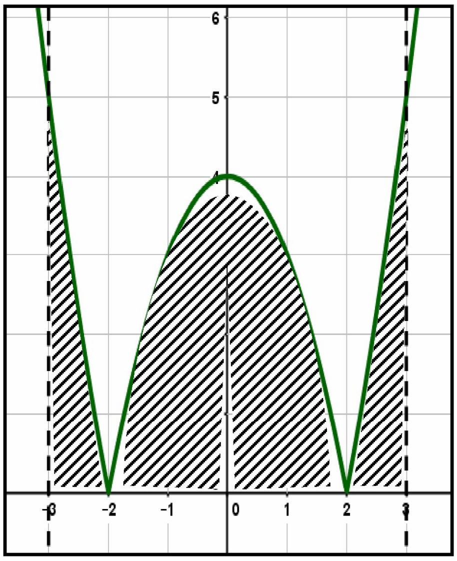
(أ) $\int_{-٤}^{٢} |س + ١|\,ءس$ من تعريف دالة المقياس نجد أن:

$|س + ١| = \begin{cases} -س - ١ & : س < -١ \\ س + ١ & : س \geq -١ \end{cases}$ ، د متصلة عند س = −١

$\therefore \int_{-٤}^{٢} |س + ١|\,ءس = \int_{-٤}^{-١} (-س - ١)\,ءس + \int_{-١}^{٢} (س + ١)\,ءس$

$= \left[-\frac{١}{٢} س^٢ - س \right]_{-٤}^{-١} + \left[\frac{١}{٢} س^٢ + س \right]_{-١}^{٢}$

$= (-\frac{١}{٢} + ١) - (-٨ + ٤) + (٢ + ٢) - (\frac{١}{٢} - ١) = \frac{١}{٢} + ٤ + ٤ + \frac{١}{٢} = ٩$



(ب) $\int_{-3}^{3} |\text{س}^2 - 4| \, \text{ءس}$

$\because$ $\text{س}^2 - 4 = 0$ عندما $\text{س} = -2$ ، $\text{س} = 2$

$\therefore$ من تعريف دالة المقياس نجد أن:

$$|\text{س}^2 - 4| = \begin{cases} \text{س}^2 - 4 & : \text{س} \le -2 \\ -\text{س}^2 + 4 & : -2 < \text{س} \le 2 \\ \text{س}^2 - 4 & : \text{س} > 2 \end{cases}$$

، د متصلة عند $\text{س} = -2$ ، $\text{س} = 2$

$$\therefore \int_{-3}^{3} |\text{س}^2 - 4| \, \text{ءس} = \int_{-3}^{-2} (\text{س}^2 - 4) \, \text{ءس}$$

$$+ \int_{-2}^{2} (-\text{س}^2 + 4) \, \text{ءس} + \int_{2}^{3} (\text{س}^2 - 4) \, \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - 4\text{س}\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{-1}{3}\text{س}^3 + 4\text{س}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - 4\text{س}\right]_{2}^{3}$$

$$= \left(\frac{-8}{3} + 8\right) - (-9 + 12) + \left(\frac{-8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) + (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 3\right) + \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right) + \left(-3 + \frac{16}{3}\right) = \frac{46}{3}$$

مثـــــال: أوجد قيمة كل ممايأتى:

(أ) $\int_{0}^{5} \text{س} \sqrt{25 - \text{س}^2} \, \text{ءس}$ (ب) $\int_{-2}^{2} \text{س}^3 \sqrt{\text{س}^2 + 3} \, \text{ءس}$

الحــــل:

(أ) $\int_{0}^{5} \text{س} \sqrt{25 - \text{س}^2} \, \text{ءس}$ $\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (25 - \text{س}^2) = -2\text{س}$

$$\therefore \int_{0}^{5} \text{س} \sqrt{25 - \text{س}^2} \, \text{ءس} = \frac{-1}{2} \int_{0}^{5} -2\text{س} (25 - \text{س}^2)^{\frac{1}{2}} \, \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{-1}{2} (25 - \text{س}^2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3}\right]_{0}^{5} = \left[\frac{-1}{3} (25 - \text{س}^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{5}$$

$$= \frac{-1}{3}\left(25-5^{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{-1}{3}\left(25-0\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{125}{3}$$

(ب) $\int_{-2}^{2} \text{س}^{3}\sqrt{\text{س}^{2}+3}\;\text{ءس}$

بوضع $\text{س}^{2}+3=\text{ع}$ $\therefore \text{س}=\sqrt{\text{ع}-3}$ $\therefore \text{ءس}=\frac{\text{ءع}}{2\sqrt{\text{ع}-3}}$

عندما $\text{س}=-2$ ، $\text{س}=2$ $\therefore \text{ع}=(-2)^{2}+3=7$ ، $\text{ع}=2^{2}+3=7$

$\therefore \int_{-2}^{2} \text{س}^{3}\sqrt{\text{س}^{2}+3}\;\text{ءس} = \int_{7}^{7}\left(\sqrt{\text{ع}-3}\right)^{3}\sqrt{\text{ع}}\;\frac{\text{ءع}}{\sqrt{\text{ع}-3}} = 0$

التكامل المحدد للدوال الفردية والزوجية:

١) إذا كانت الدالة د فردية ومتصلة على الفترة $[-\text{أ} ، \text{أ}]$ فإن:

$$\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\;\text{ءس} = \text{صفر}$$

٢) إذا كانت الدالة د زوجية ومتصلة على الفترة $[-\text{أ} ، \text{أ}]$ فإن:

$$\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\;\text{ءس} = 2\int_{0}^{\text{أ}} \text{د(س)}\;\text{ءس}$$

مثال: أوجد قيمة كل ممايأتى:

(أ) $\int_{-3}^{3} \frac{\text{س}}{1+\text{س}^{2}}\;\text{ءس}$ (ب) $\int_{-\pi}^{\pi} (4+\pi\,\text{جتا}2\text{س})\;\text{ءس}$

الحل:

(أ) $\int_{-3}^{3} \frac{\text{س}}{1+\text{س}^{2}}\;\text{ءس}$ $\because \text{د(س)} = \frac{\text{س}}{1+\text{س}^{2}}$ متصلة على ح

، $\text{د}(-\text{س}) = \frac{-\text{س}}{1+(-\text{س})^{2}} = \frac{-\text{س}}{1+\text{س}^{2}} = -\text{د(س)}$

$\therefore$ د(س) دالة فردية $\therefore \int_{-3}^{3} \frac{\text{س}}{1+\text{س}^{2}}\;\text{ءس} = \text{صفر}$

(ب) $\int_{-\pi}^{\pi} (\text{٤} + \pi\,\text{جتا٢س})\ \text{ءس}$ ∵ $\text{د(س)} = \text{٤} + \pi\,\text{جتا٢س}$ متصلة على ح

، $\text{د(−س)} = \text{٤} + \pi\,\text{جتا(−٢س)} = \text{٤} + \pi\,\text{جتا٢س} = \text{د(س)}$ ∴ د(س) دالة زوجية

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} (\text{٤} + \pi\,\text{جتا٢س})\ \text{ءس} = \text{٢}\int_{\text{٠}}^{\pi} (\text{٤} + \pi\,\text{جتا٢س})\ \text{ءس} = \text{٢}\left[\text{٤س} + \frac{\pi}{\text{٢}}\,\text{جا٢س}\right]_{\text{٠}}^{\pi}$$

$$= \text{٢}\left(\text{٤}\pi + \frac{\pi}{\text{٢}}\,\text{جا٢}\pi - \text{٠} - \frac{\pi}{\text{٢}}\,\text{جا٠}\right) = \text{٢} \times \text{٤}\pi = \text{٨}\pi$$

مثـــال: أوجد قيمة كل ممايأتى:

(أ) $\int_{\text{٠}}^{\text{٣}} (\text{٢س} - \text{٧هـ}^{\text{س}})\ \text{ءس}$ (ب) $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣})\ \text{ءس}$

(ج) $\int_{-\text{٤}}^{\text{٠}} \text{س}(\text{س} + \text{٤})^{\text{٣}}\ \text{ءس}$ (د) $\int_{\text{٠}}^{\text{٣}} \text{س}\sqrt{\text{س} + \text{١}}\ \text{ءس}$

الحـــل:

(أ) $\int_{\text{٠}}^{\text{٣}} (\text{٢س} - \text{٧هـ}^{\text{س}})\ \text{ءس} = \left[\text{س}^{\text{٢}} - \text{٧هـ}^{\text{س}}\right]_{\text{٠}}^{\text{٣}}$

$$= (\text{٣}^{\text{٢}} - \text{٧هـ}^{\text{٣}}) - (\text{٠} - \text{٧هـ}^{\text{٠}}) = \text{٩} - \text{٧هـ}^{\text{٣}} + \text{٧} = \text{١٦} - \text{٧هـ}^{\text{٣}}$$

(ب) $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣})\ \text{ءس}$ ∵ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣}) = \text{٢س}$

∴ $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣})\ \text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{٢س}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣})\ \text{ءس}$ دالة × مشتقتها

$$= \left[\frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣})^{\text{٢}}\right]_{\text{٠}}^{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\left((\text{٤} - \text{٣})^{\text{٢}} - (\text{٠} - \text{٣})^{\text{٢}}\right) = -\text{٢}$$

(ج) $\int_{-\text{٤}}^{\text{٠}} \text{س}(\text{س} + \text{٤})^{\text{٣}}\ \text{ءس}$

التكامل لايمكن وضعه على صورة دالة × مشتقتها لذلك يحل بطريقة التجزئ او التعويض

الحل باستخدام طريقة التجزئ

نفرض ان $\text{ص} = \text{س}$ ⊗ $\text{ءع} = (\text{س} + \text{٤})^{\text{٣}}\ \text{ءس}$

∴ $\text{ءص} = \text{ءس}$ ⊖ ، $\text{ع} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}(\text{س} + \text{٤})^{\text{٤}}$

$\because \int ص\,ءع = ص ع - \int ع\,ءص$

$\therefore \int س(س+٤)^{٣}\,ءس = \frac{١}{٤}س(س+٤)^{٤} - \frac{١}{٤}\int (س+٤)^{٤}\,ءس$

$= \frac{١}{٤}س(س+٤)^{٤} - \frac{١}{٢٠}(س+٤)^{٥}$

$\therefore \int_{-٤}^{٠} س(س+٤)^{٣}\,ءس = \left[\frac{١}{٤}س(س+٤)^{٤} - \frac{١}{٢٠}(س+٤)^{٥}\right]_{-٤}^{٠}$

$= (٠ - \frac{١}{٢٠}(٠+٤)^{٥}) - (٠) = \frac{-٢٥٦}{٥}$

(ء) $\int_{٠}^{٣} س\sqrt{س+١}\,ءس$

التكامل لايمكن وضعه على صورة دالة × مشتقتها لذلك يحل بطريقة التجزئ او التعويض

الحل باستخدام طريقة التعويض

بوضع $\sqrt{س+١} = ع \quad \therefore س+١ = ع^{٢} \quad \therefore س = ع^{٢} - ١ \quad \therefore ءس = ٢ع\,ءع$

عندما $س = ٠ \quad \therefore ع = ١$ ، **عندما** $س = ٣ \quad \therefore ع = ٢$

$\therefore \int_{٠}^{٣} س\sqrt{س+١}\,ءس = \int_{١}^{٢} (ع^{٢}-١) \times ع \times ٢ع\,ءع$

$= \int_{١}^{٢} (٢ع^{٤} - ٢ع^{٢})\,ءع = \left[\frac{٢}{٥}ع^{٥} - \frac{٢}{٣}ع^{٣}\right]_{١}^{٢}$

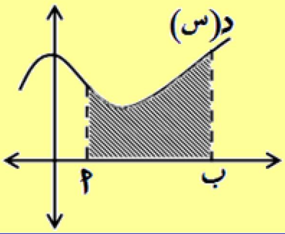
$= (\frac{٦٤}{٥} - \frac{١٦}{٣}) - (\frac{٢}{٥} - \frac{٢}{٣}) = \frac{١١٢}{١٥} + \frac{٤}{١٥} = \frac{١١٦}{١٥}$

٤ - ٤ المساحات فى المستوى

✸ اولا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات فى الفترة [أ، ب] :

نظرية:

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] ، د(س) ≥ ٠ فى هذة الفترة ، م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د والمستقيمين س = أ ، س = ب فإن:



$$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$$

أى أن المساحة تحت المنحنى د وفوق محور السينات فى الفترة [أ ، ب] تساوى التكامل المحدد لمنحنى الدالة خلال هذه الفترة وتكون حدود التكامل المحدد هى بداية ونهاية الفترة

مثـــال:

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = −١ ، س = ٢ حيث د(س) = ٣س^{٢} + ١

الحـــل:

د(س) = ٣س^{٢} + ١ كثيرة حدود فهى متصلة على الفترة [−١ ، ٢] ، د(س) > ٠ فى نفس الفترة

$$\therefore م = \int_{-١}^{٢} د(س)\, ءس = \int_{-١}^{٢} (٣س^{٢} + ١)\, ءس$$

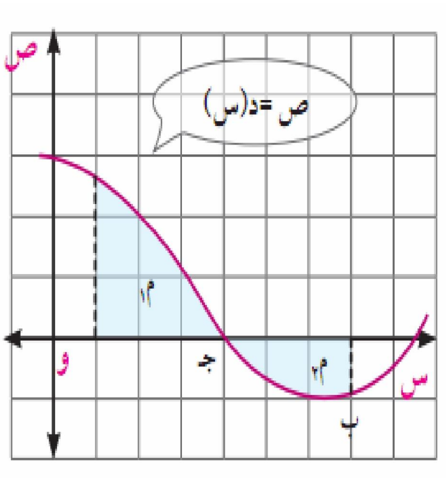
$$= \left[س^{٣} + س\right]_{-١}^{٢} = (٢^{٣} + ٢) - ((-١)^{٣} + (-١)) = ٨ + ٢ + ٢ = ١٢ \text{ وحدة مربعة}$$

ملاحظة هامة:

لإيجاد المساحة بين المنحنى د وتحت محور السينات فى الفترة [أ ، ب] نأخذ القيمة المطلقة للتكامل المحدد لمنحنى الدالة د أى أن:

$$م = \left| \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس \right|$$

خطوات حساب المساحة بين المنحنى ومحور السينات:



١) إيجاد أصفار الدالة مثل س = جـ كما بالشكل المجاور

ثم نقسم مجال الدالة [أ ، ب] إلى فترات جزئية بهذه الأصفار

٢) دراسة إشارة الدالة على الفترات الجزئية إن وجدت فإذا كانت:

- موجبة أى د(س) > ٠ على الفترة [أ ، جـ] فإن:

$$\text{م}_1 = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\, \text{ءس}$$

- سالبة أى د(س) < ٠ على الفترة [جـ ، ب] فإن:

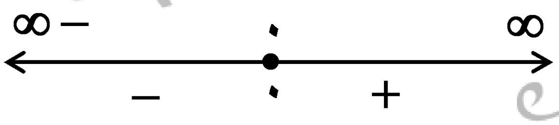
$$\text{م}_2 = \left| \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ءس} \right|$$

مثـــال:

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $\text{د(س)} = \frac{\text{٤س}}{\text{س}^2 + 1}$ والمستقيم س = ٤ وفوق محور السينات

الحـــل:

نوجد أصفار الدالة بوضع د(س) = ٠



$\therefore \frac{\text{٤س}}{\text{س}^2 + 1} = 0 \qquad \therefore \text{س} = 0$

بدراسة إشارة الدالة نجد أن د(س) > ٠ فى الفترة]٠ ، ∞[

$$\therefore \text{م} = \int_0^4 \frac{\text{٤س}}{\text{س}^2+1}\,\text{ءس} = 2\int_0^4 \frac{\text{٢س}}{\text{س}^2+1}\,\text{ءس}$$ ⟵ البسط مشتقة المقام

$$= 2\left[\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+1)\right]_0^4 = 2\left[\text{لـو}_{\text{هـ}}17 - \text{لـو}_{\text{هـ}}1\right] = 2\,\text{لـو}_{\text{هـ}}17$$ وحدة مربعة

مثـــال:

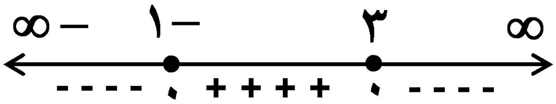
أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = ٣ + ٢س − س٢ ومحور السينات

الحـــل:

نوجد أصفار الدالة بوضع د(س) = ٠ $\quad \therefore 3 + \text{٢س} - \text{س}^2 = 0$ بالضرب فى (−١)

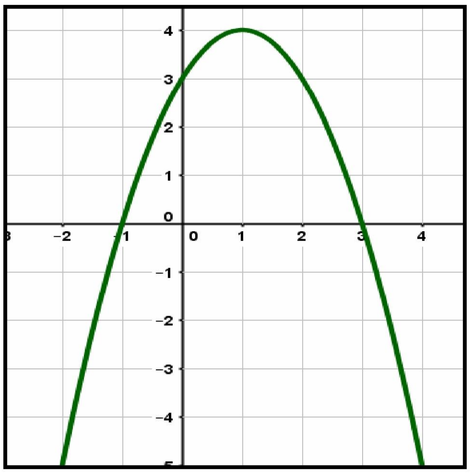
$\therefore$ $\text{س}^2 - 2\text{س} - 3 = 0$ $\therefore$ $(\text{س} + 1)(\text{س} - 3) = 0$

$\therefore$ $\text{س} = -1$ ، $\text{س} = 3$



من الشكل نـجد أن المساحة بين المنحنى ومحور السينات

هى الفترة $[-1 ، 3]$



$$\therefore \text{م} = \int_{-1}^{3} (3 + 2\text{س} - \text{س}^2)\, \text{ء}\text{س}$$

$$= \left[3\text{س} + \text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{-1}^{3}$$

$$= (9 + 9 - 9) - (-3 + 1 + \frac{1}{3}) = \frac{32}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

مثـــال:

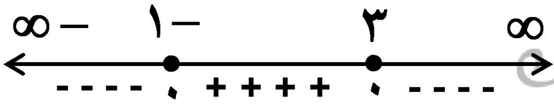
أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى $\text{ص} = 3 + 2\text{س} - \text{س}^2$ والمستقيمات $\text{س} = -1$ ، $\text{س} = 4$ ، $\text{ص} = 0$

الحـــل:

نوجد أصفار الدالة بوضع $\text{د}(\text{س}) = 0$ $\therefore$ $3 + 2\text{س} - \text{س}^2 = 0$ بالضرب فى (-1)

$\therefore$ $\text{س}^2 - 2\text{س} - 3 = 0$ $\therefore$ $(\text{س} + 1)(\text{س} - 3) = 0$

$\therefore$ $\text{س} = -1$ ، $\text{س} = 3$



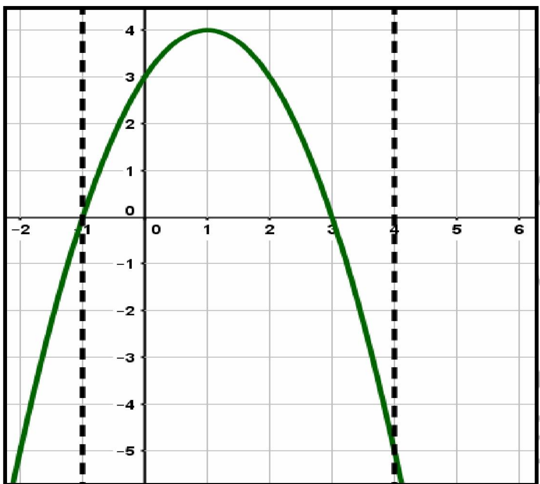
$\because$ $\text{ص} = 0$ هى معادلة محور السينات

$\therefore$ من الشكل نـجد أن المساحة بين المنحنى ومحور السينات

والمستقيمان $\text{س} = -1$ ، $\text{س} = 4$

هى الفترة $[-1 ، 3]$ أعلى محور السينات

والفترة $[3 ، 4]$ أسفل محور السينات



$$\therefore \text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 = \int_{-1}^{3} (3 + 2\text{س} - \text{س}^2)\, \text{ء}\text{س}$$

$$+ \left|\int_{3}^{4} (3 + 2\text{س} - \text{س}^2)\, \text{ء}\text{س}\right|$$

$$= \left[3\text{س} + \text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{-1}^{3} + \left|\left[3\text{س} + \text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{3}^{4}\right|$$

= [(٩ + ٩ − ٩) − (−٣ + ١ + $\frac{١}{٣}$)] + ‖ [(١٢ + ١٦ − $\frac{٦٤}{٣}$) − (٩ + ٩ − ٩)] ‖

= $\frac{٣٢}{٣}$ + | $\frac{-٧}{٣}$ | = $\frac{٣٢}{٣}$ + $\frac{٧}{٣}$ = $\frac{٣٩}{٣}$ = ١٣ وحدة مربعة

🕮 مثـــال:

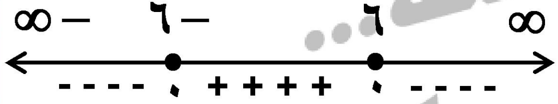
إذا كانت تكلفة تغطية المتر المربع الواحد من أرضية ممرات الفندق بالجرانيت ٤٠٠ جنيه وتم تغطية ٥ ممرات متطابقة بالجرانيت مساحة كل منها محدودة بمنحنى الدالة د والمستقيمين س = ٠ ، ص = ٠

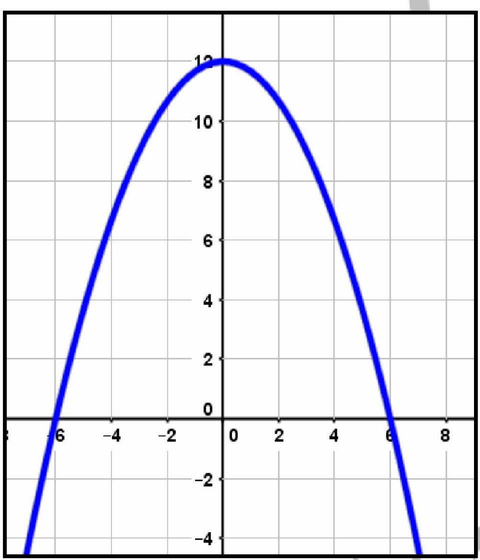
حيث د(س) = ١٢ − $\frac{١}{٣}$ س^{٢} . أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة.

✍ الحـــل:

نوجد أصفار الدالة بوضع د(س) = ٠ ∴ ١٢ − $\frac{١}{٣}$ س^{٢} = ٠

∴ $\frac{١}{٣}$ س^{٢} = ١٢ ∴ س^{٢} = ٣٦ ∴ س = ± ٦





∵ س = ٠ ، ص = ٠ هما معادلتى محورى الصادات و السينات

∴ المساحة المطلوبة هى الفترة [٠ ، ٦] أعلى محور السينات

∴ مساحة الممر الواحد م = $\int_{٠}^{٦}$ (١٢ − $\frac{١}{٣}$ س^{٢}) ءس

= [١٢س − $\frac{١}{٩}$ س^{٣}]$_{٠}^{٦}$

= ١٢ × ٦ − $\frac{١}{٩}$ × ٦^{٣} = ٤٨ متر مربع

∴ تكلفة الممر الواحد = ٤٨ × ٤٠٠ = ١٩٢٠٠ جنيه

∴ تكلفة الممرات الخمسة = ٥ × ١٩٢٠٠ = ٩٦٠٠٠ جنيه

✷ ثانيا: مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين:

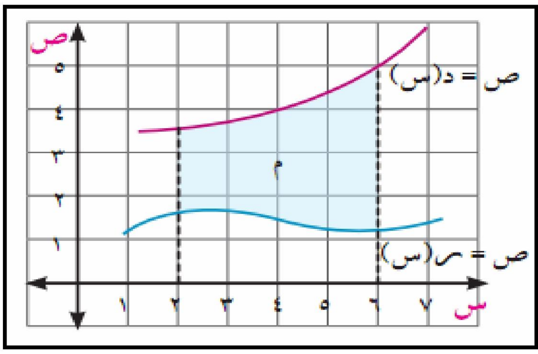
تعريف:

إذا كانت د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب] ، د(س) ≥ ر(س) لكل س ∈ [أ ، ب]

فإن مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين د، ر والمستقيمين س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة:

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)} - \text{ر(س)}]\,\text{ءس}$$

ففى الشكل المقابل



د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب] ، د(س) > ر(س)

لكل س ∈ [أ ، ب] وبالتالى تكون مساحة المنطقة المحددة

بالمنحنيين د، ر والمستقيمين س = أ ، س = ب هى:

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)} - \text{ر(س)}]\,\text{ءس}$$

ملاحظة هامة:

لإيجاد مساحة منطقة بين منحنيات متقاطعة تكون حدود التكامل هى الإحداثيات السينية لنقط التقاطع

خطوات حساب المساحة بين منحنيين:

لإيجاد المساحة بين منحنى الدالتين د(س) ، ر(س)

١) إيجاد الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين فتكون هى حدود التكامل

٢) تحديد الدالة الأكبر فى كل فترة من خلال الرسم أو بإخذ قيمة إختيارية من داخل كل فترة والتعويض فى كل من الدالتين:

فإذا كانت د(س) > ر(س) تكون المساحة $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)} - \text{ر(س)}]\,\text{ءس}$

فإذا كانت د(س) < ر(س) تكون المساحة $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{ر(س)} - \text{د(س)}]\,\text{ءس}$

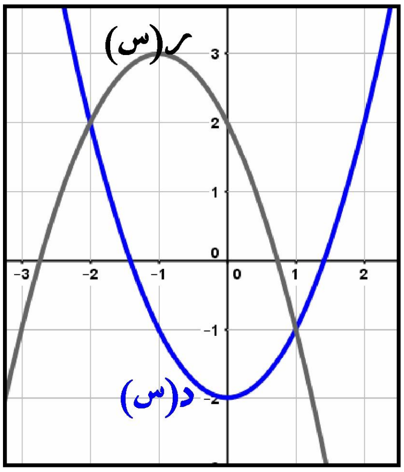
ويمكن الإستغناء عن ذلك بوضع علامة القيمة المطلقة على التكامل وتكون المساحة

م = القيمة المطلقة لتكامل (اى دالة – الدالة الأخرى)

مثـــال:

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د ، ر حيث

$د(س) = س^{٢} - ٢ \quad ، \quad ر(س) = ٣ - (س + ١)^{٢}$



الحـــل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع نضع $د(س) = ر(س)$

$\therefore س^{٢} - ٢ = ٣ - (س + ١)^{٢} \quad \therefore س^{٢} - ٢ = ٣ - س^{٢} - ٢س - ١$

$\therefore ٢س^{٢} + ٢س - ٤ = ٠ \quad \therefore س^{٢} + س - ٢ = ٠$

$\therefore (س + ٢)(س - ١) = ٠ \quad \therefore س = -٢$ أو $س = ١$

عند $س = -٢$

$د(س) = (-٢)^{٢} - ٢ = ٢ \quad ، \quad ر(س) = ٣ - (-٢ + ١)^{٢} = ٢ \quad \therefore د(س) = ر(س)$

عند $س = ١$

$د(س) = ١^{٢} - ٢ = -١ \quad ، \quad ر(س) = ٣ - (١ + ١)^{٢} = -١ \quad \therefore د(س) = ر(س)$

$\therefore$ حدا التكامل هما $س = -٢$ ، $س = ١$ ، $د(س)$ ، $ر(س)$ متصلتان على الفترة $[-٢ ، ١]$

نأخذ أى قيمة إختيارية تنتمى للفترة $[-٢ ، ١]$ ولتكن $س = ٠$

$د(٠) = ٠ - ٢ = -٢ \quad ، \quad ر(٠) = ٣ - (٠ + ١)^{٢} = ٢ \quad \therefore ر(س) > د(س)$ فى هذه الفترة

$\therefore$ مساحة المنطقة المطلوبة $م = \int_{-٢}^{١} [ر(س) - د(س)] \, ءس$

$$\therefore م = \int_{-٢}^{١} [٣ - (س + ١)^{٢} - س^{٢} + ٢] \, ءس = \int_{-٢}^{١} (-٢س^{٢} - ٢س + ٤) \, ءس$$

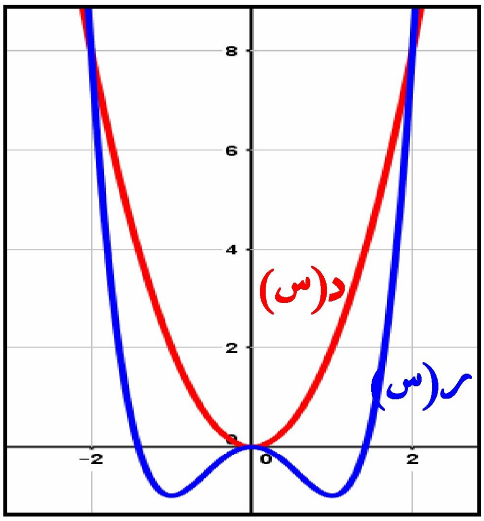
$$= \left[\frac{-٢}{٣}س^{٣} - س^{٢} + ٤س\right]_{-٢}^{١} = \left(\frac{٧}{٣}\right) - \left(\frac{-٢٠}{٣}\right) = ٩$$ وحدة مربعة

مثـــال:

تقوم شركة إعلانات بإنتاج ملصق لتسويق سلعة ما فإذا كان الملصق على شكل منطقة محددة بمنحنى الدالتين د ، ر حيث $د(س) = ٢س^{٢}$ ، $ر(س) = س^{٤} - ٢س^{٢}$ مقدرة بالديسمتر. إحسب المساحة اللازمة من الورق اللاصق لإنتاج ١٠٠٠ ملصق لهذه السلعة.

الحـــل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع نضع $د(س) = ر(س)$



$\therefore \text{س}^{4} - 2\text{س}^{2} = 2\text{س}^{2} \qquad \therefore \text{س}^{4} - 4\text{س}^{2} = 0$

$\therefore \text{س}^{2}(\text{س}^{2} - 4) = 0 \qquad \therefore \text{س}^{2}(\text{س} + 2)(\text{س} - 2) = 0$

$\therefore \text{س} = 0$ أو $\text{س} = -2$ أو $\text{س} = 2$

عند $\text{س} = 0$

$\text{د(س)} = 0 \text{ ، } \text{ر(س)} = 0 \quad \therefore \text{د(س)} = \text{ر(س)}$

عند $\text{س} = -2$

$\text{د(س)} = 2(-2)^{2} = 8 \text{ ، } \text{ر(س)} = (-2)^{4} - (-2)^{2} = 8$

عند $\text{س} = 2$

$\text{د(س)} = 2(2)^{2} = 8 \text{ ، } \text{ر(س)} = (2)^{4} - (2)^{2} = 8 \quad \therefore \text{د(س)} = \text{ر(س)}$

$\therefore$ مساحة الملصق الواحد $\text{م} = \int_{-2}^{2} [\text{د(س)} - \text{ر(س)}]\, \text{ءس}$ (من الشكل $\text{د(س)} > \text{ر(س)}$)

$\therefore \text{م} = \int_{-2}^{2} (2\text{س}^{2} - \text{س}^{4} + 2\text{س}^{2})\, \text{ءس} = 2 \times \int_{0}^{2} (4\text{س}^{2} - \text{س}^{4})\, \text{ءس}$

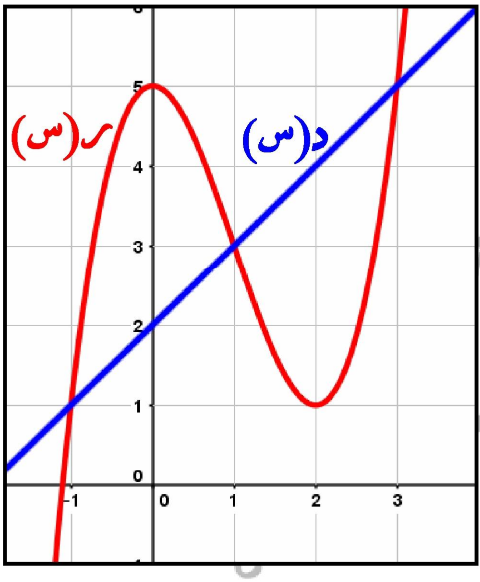
$= 2 \times \left[\frac{4}{3}\text{س}^{3} - \frac{1}{5}\text{س}^{5}\right]_{0}^{2} = 2\left(\frac{4}{3} \times 2^{3} - \frac{1}{5} \times 2^{5}\right) = \frac{128}{15}$ ديسمتر مربع

$\therefore$ المساحة اللازمة لإنتاج ١٠٠٠ ملصق $= 1000 \times \frac{128}{15} = \frac{25600}{3}$ ديسمتر مربع

مثـــال:

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د ، ر حيث

$\text{د(س)} = \text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} + 5 \text{ ، } \text{ر(س)} = \text{س} + 2$



الحـــل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع نضع $\text{د(س)} = \text{ر(س)}$

$\therefore \text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} + 5 = \text{س} + 2$

$\therefore \text{س}^{3} - 3\text{س}^{2} - \text{س} + 3 = 0$

$\therefore (\text{س}^{3} - 3\text{س}^{2}) - (\text{س} - 3) = 0$

$\therefore \text{س}^{2}(\text{س} - 3) - (\text{س} - 3) = 0$

$\therefore (\text{س} - 3)(\text{س}^{2} - 1) = 0 \qquad \therefore (\text{س} - 3)(\text{س} + 1)(\text{س} - 1) = 0$

$\therefore \text{س} = -1$ أو $\text{س} = 1$ أو $\text{س} = 3$ ← لاحظ أنه يمكن الحصول على هذا الحل بالآلة الحاسبة

∴ التكامل على الفترتين [−١ ، ١] ، [١ ، ٣] لإيجاد المساحة المطلوبة

∴ مساحة المنطقة المطلوبة $م = \left|\int_{-1}^{1}[د(س) - ر(س)]\,ءس\right| + \left|\int_{1}^{3}[د(س) - ر(س)]\,ءس\right|$

$∴ م = \left|\int_{-1}^{1}(س^{3} - 3س^{2} - س + 3)\,ءس\right| + \left|\int_{1}^{3}(س^{3} - 3س^{2} - س + 3)\,ءس\right|$

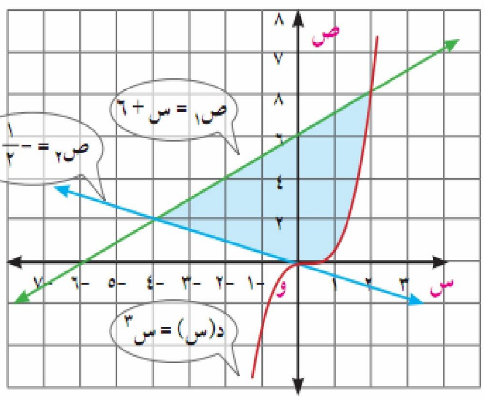
$= \left|\left[\frac{1}{4}س^{4} - س^{3} - \frac{1}{2}س^{2} + 3س\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}س^{4} - س^{3} - \frac{1}{2}س^{2} + 3س\right]_{1}^{3}\right|$

$= \left|\left(\frac{7}{4}\right) - \left(\frac{-9}{4}\right)\right| + \left|\left(\frac{-9}{4}\right) - \left(\frac{7}{4}\right)\right| = 4 + 4 = 8$ وحدة مربعة

لاحظ أنه تم وضع علامة القيمة المطلقة على التكامل حتى نتجنب تحديد الدالة الأكبر فى كل فترة

مثـــال:

فى الشكل المقابل أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د والمستقيمين $ص_{1}$ ، $ص_{2}$ حيث:



$د(س) = س^{3}$ ، $ص_{1} = س + 6$ ، $ص_{2} = \frac{-1}{2}س$

الحـــل:

من الشكل نجد أن الإحداثيات السينية لنقط التقاطع هى:

$ص_{1} \cap ص_{2} = \{-4\}$ ، $د(س) \cap ص_{2} = \{0\}$ ، $د(س) \cap ص_{1} = \{2\}$

∴ التكامل على الفترة [−٤ ، ٠] للمساحة بين $ص_{1}$ ، $ص_{2}$ ، الفترة [٠ ، ٢] للمساحة بين $ص_{1}$ ، د(س)

∴ مساحة المنطقة المطلوبة $م = \int_{-4}^{0}[ص_{1} - ص_{2}]\,ءس + \int_{0}^{2}[ص_{1} - د(س)]\,ءس$

$∴ م = \int_{-4}^{0}\left(\frac{3}{2}س + 6\right)ءس + \int_{0}^{2}(س + 6 - س^{3})\,ءس$

$= \left[\frac{3}{4}س^{2} + 6س\right]_{-4}^{0} + \left[6س + \frac{1}{2}س^{2} - \frac{1}{4}س^{4}\right]_{0}^{2}$

$= (0 - (-12)) + (10 - 0) = 12 + 10 = 22$ وحدة مربعة

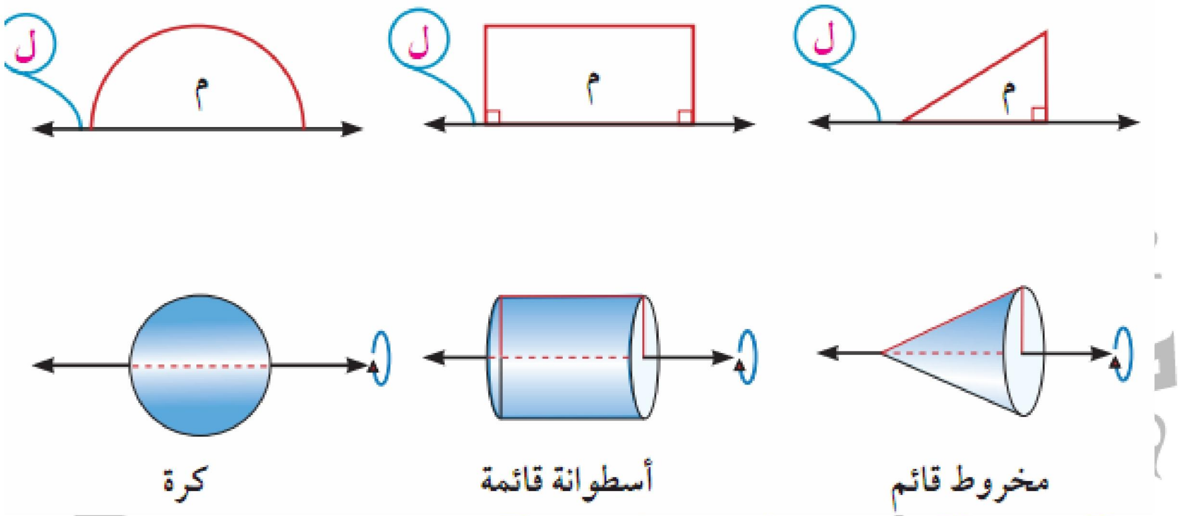
٤ - ٥ حجوم الأجسام الدورانية

✸ المجسم الدورانى:

ينشأ المجسم الدورانى من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت فى مستويها ويسمى المستقيم " محور الدوران"

كمثال:

دوران المثلث القائم حول احد ضلعى القائمة ينشأ المخروط الدائرى القائم ودوران المستطيل حول احد بعديه تنشأ الإسطوانه الدائرية القائمة و دوران نصف دائرة حول قطرها ينشأ سطح الكرة كما فى الشكل



✸ الحجم الدورانى:

اولا : حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور:

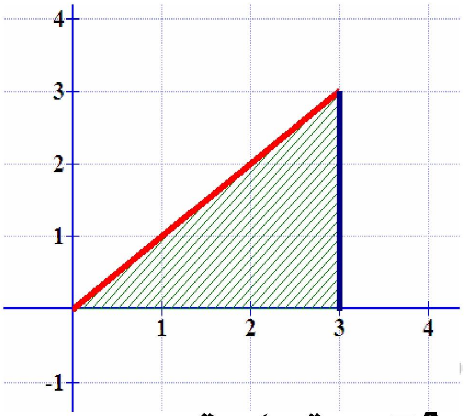
نظرية:

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة $[أ ، ب]$ ، د(س) $\geq$ ٠ لكل س $\in [أ ، ب]$ فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات هو:

$$ع = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^٢ \, ءس$$

مثـــال:

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات علما بأن د(س) = س ما اسم المجسم الناتج ؟ بين كيف يمكن هندسيا التحقق من صحة إجابتك؟



الحـــل:

الدالة د كثيرة حدود متصلة على الفترة $[٠ ، ٣]$

، $د(س) \geq ٠$ لكل $س \in [٠ ، ٣]$

$\because ع = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^{٢} ءس$

$\therefore ع = \pi \int_{٠}^{٣} س^{٢} ءس = \pi \left[\frac{١}{٣} س^{٣}\right]_{٠}^{٣} = \pi(\frac{١}{٣} \times ٢٧) = ٩\pi$ وحدة مكعبة

الجسم الناتج هو مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته $نق = ٣$ وإرتفاعه $ع = ٣$

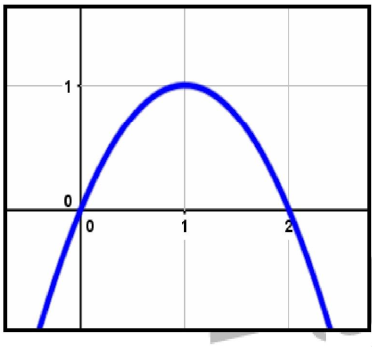
التحقق من الإجابة هندسيا:

$\because$ حجم المخروط $= \frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الإرتفاع $= \frac{١}{٣} \pi نق^{٢} ع$

$\therefore$ حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi \times ٣^{٢} \times ٣ = ٩\pi$ وحدة مكعبة

مثـــال:

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = ٢س - س^{٢}$ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات



الحـــل:

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع $ص = ٠$

$\therefore ٢س - س^{٢} = ٠ \quad \therefore س(٢ - س) = ٠ \quad \therefore س = ٠$ أو $س = ٢$

الدالة د كثيرة حدود متصلة على الفترة $[٠ ، ٢]$

، $د(س) \geq ٠$ لكل $س \in [٠ ، ٢]$ ، $\because ع = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^{٢} ءس$

$\therefore ع = \pi \int_{٠}^{٢} [٢س - س^{٢}]^{٢} ءس = \pi \int_{٠}^{٢} (٤س^{٢} - ٤س^{٣} + س^{٤}) ءس$

$$= \pi \left[\frac{٤}{٣}س^{٣} - س^{٤} + \frac{١}{٥}س^{٥} \right]_{٠}^{٢} = \pi(\frac{٤}{٣}\times ٢^{٣} - ٢^{٤} + \frac{١}{٥}\times ٢^{٥}) = \frac{١٦}{١٥}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

ملاحظة هامة:

إذا كان دوران المنطقة المستوية بين $س = أ$ ، $س = ب$ حول محور السينات فإن

$$ع = \pi \int_{أ}^{ب} ص^{٢} ء س = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^{٢} ء س$$

إذا كان دوران المنطقة المستوية بين $ص = جـ$ ، $ص = ء$ حول محور الصادات فإن

$$ع = \pi \int_{جـ}^{ء} س^{٢} ء ص = \pi \int_{جـ}^{ء} [د(ص)]^{٢} ء ص$$

∴ الدوران حول محور السينات نضع ص كدالة فى س و الدوران حول محور الصادات نضع س كدالة فى ص

مثــــال:

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^{٢}$ ومحور الصادات والمستقيمين $ص = ٠$ ، $ص = ٦$ دورة كاملة حول محور الصادات

الحــــل:

∵ الدوران حول محور الصادات ، ∵ $ص = س^{٢}$ ∴ $س = \pm\sqrt{ص}$

$$∴ ع = \pi \int_{٠}^{٦} س^{٢} ء ص = \pi \int_{٠}^{٦} (\sqrt{ص})^{٢} ء ص = \pi \int_{٠}^{٦} ص ء ص$$

$$= \pi \left[\frac{١}{٢}ص^{٢} \right]_{٠}^{٦} = \pi(\frac{١}{٢}\times ٦^{٢} - ٠) = ١٨\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

مثــــال:

باستخدام التكامل أثبت أن:

(أ) حجم الكرة $= \frac{٤}{٣}\pi نق^{٣}$

(ب) حجم الإسطوانة الدائرة القائمة $= \pi نق^{٢} ع$

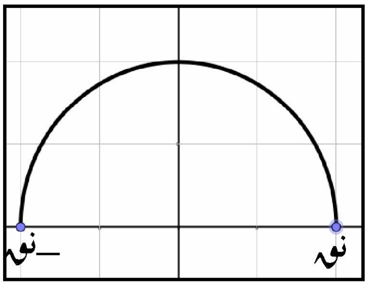
الحــــل:

(أ) ∵ الكرة تنشأ من دوران نصف دائرة دورة كاملة حول قطرها

∴ نفرض نصف دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق وينطبق قطرها على محور السينات

∵ معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق هى $س^2 + ص^2 = نق^2$

∵ الدوران حول محور السينات ∴ $ص^2 = نق^2 - س^2$ حيث $س \in [-نق ، نق]$



$$\therefore ع = \pi \int_{-نق}^{نق} ص^2 \, ءس = \pi \int_{-نق}^{نق} (نق^2 - س^2) \, ءس$$

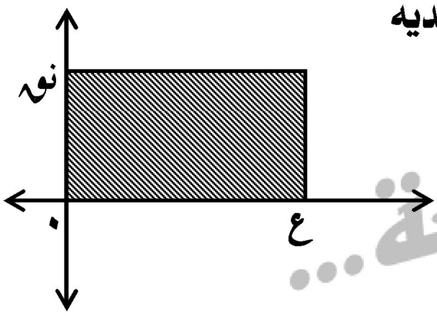
$$= 2\pi \int_{0}^{نق} (نق^2 - س^2) \, ءس = 2\pi \left[نق^2 س - \frac{1}{3} س^3 \right]_{0}^{نق}$$

$$= 2\pi \left[نق^2 \times نق - \frac{1}{3} \times نق^3 - 0 \right] = 2\pi \times \frac{2}{3} نق^3 = \frac{4}{3} \pi نق^3$$

(ب) ∵ الإسطوانة الدائرية القائمة تنشأ من دوران مستطيل حول أحد بعديه

∴ نفرض مستطيل ينطبق بعديه على محورى السينات والصادات

∵ الدوران حول محور السينات



∴ $ص = نق$ حيث $س \in [0 ، ع]$

$$\therefore ع = \pi \int_{0}^{ع} ص^2 \, ءس = \pi \int_{0}^{ع} نق^2 \, ءس = \pi نق^2 \int_{0}^{ع} ءس$$

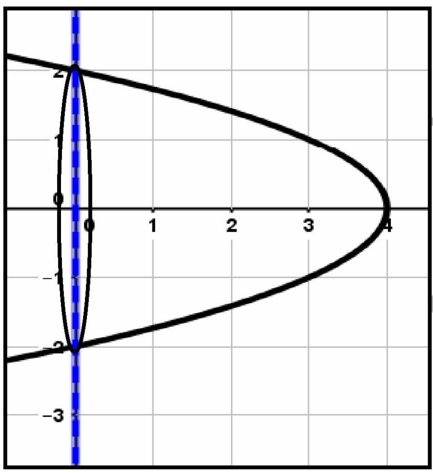
$$= \pi نق^2 \left[س \right]_{0}^{ع} = \pi نق^2 (ع - 0) = \pi نق^2 ع$$

مثـــال:

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص^2 = 4 - س$ والمستقيم $س = 0$ عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة :

اولا: حول محور السينات ثانيا: حول محور الصادات

الحـــل:



اولا: الدوران حول محور السينات

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع $ص = 0$

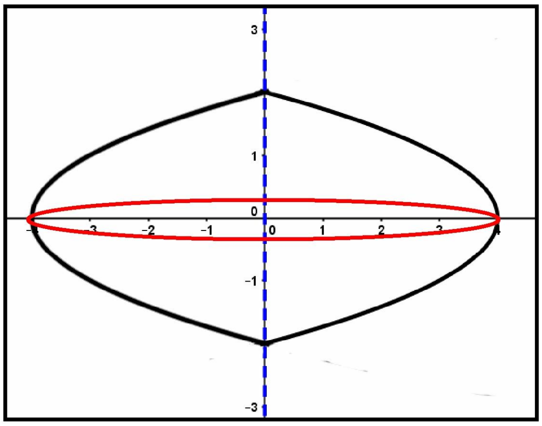
∴ $4 - س = 0$ ∴ $س = 4$

∵ المستقيم $س = 0$ هو محور الصادات

∴ حدود التكامل هى $س = 0$ ، $س = 4$

$$\therefore ع = \pi \int_{0}^{4} ص^2 \, ءس = \pi \int_{0}^{4} (4 - س) \, ءس$$

$$\therefore ع = \pi \left[4س - \frac{1}{2} س^2 \right]_{0}^{4} = \pi (4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4^2) = 8\pi$$



ثانيا: الدوران حول محور الصادات

لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع $س = ٠$

$\therefore ص^{٢} = ٤ \qquad \therefore ص = \pm ٢$

$\therefore$ حدود التكامل هى $ص = -٢$ ، $ص = ٢$

$\because ص^{٢} = ٤ - س \qquad \therefore س = ٤ - ص^{٢}$

$$\therefore ع = \pi \int_{-٢}^{٢} س^{٢} \, ءص = \pi \int_{-٢}^{٢} (٤ - ص^{٢})^{٢} \, ءص$$

$$= ٢\pi \int_{٠}^{٢} (١٦ - ٨ص^{٢} + ص^{٤}) \, ءص = ٢\pi \left[١٦ص - \frac{٨}{٣}ص^{٣} + \frac{١}{٥}ص^{٥} \right]_{٠}^{٢}$$

$$= ٢\pi \left(١٦ \times ٢ - \frac{٨}{٣} \times ٢^{٣} + \frac{١}{٥} \times ٢^{٥} \right) = \frac{٥١٢}{١٥}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

ثانيا: حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنين:

نظرية:

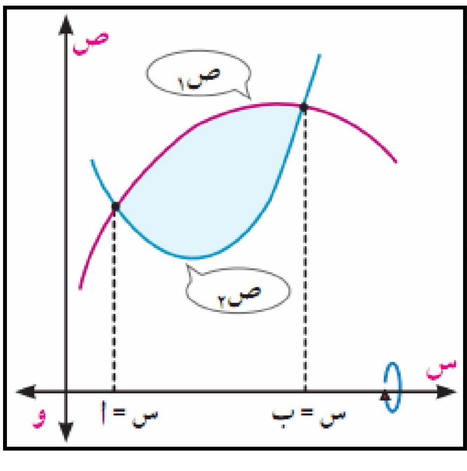
إذا كانت د ، ر دالتين متصلتين على الفترة $[أ ، ب]$، $د(س) \geq ٠$ ، $ر(س) \geq ٠$ لكل $س \in [أ ، ب]$

فإن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين د ، ر والمستقيمين $س = أ$ ، $س = ب$

دورة كاملة حول محور السينات هو:

$$ع = \pi \int_{أ}^{ب} \left[د(س)^{٢} - ر(س)^{٢} \right] ءس$$

ملاحظات هامة:



١) إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين $س_{١} = د(ص)$

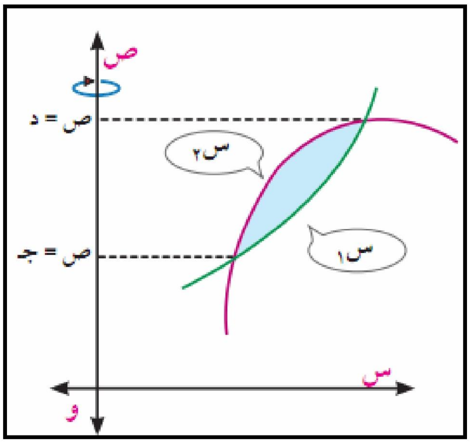
، $ص_{٢} = د(س)$ حيث $ص_{١} > ص_{٢}$ لكل $س \in [أ ، ب]$

دورة كاملة حول محور السينات فإن الإحداثيين السينيين

لنقط التقاطع هما حدود التكامل ويكون حجم الجسم الناتج هو:

$$ع = \pi \int_{أ}^{ب} \left[ص_{١}^{٢} - ص_{٢}^{٢} \right] ءس$$

أى $ع = \pi \int_{أ}^{ب} ص_{١}^{٢} \, ءس - \pi \int_{أ}^{ب} ص_{٢}^{٢} \, ءس$



٢) إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص_١ = د(س)$

، $س_٢ = د(ص)$ حيث $س_١ > س_٢$ لكل $ص \in [جـ ، د]$

دورة كاملة حول محور الصادات فإن الإحداثيين الصاديين لنقط التقاطع هما حدود التكامل ويكون حجم الجسم الناتج هو:

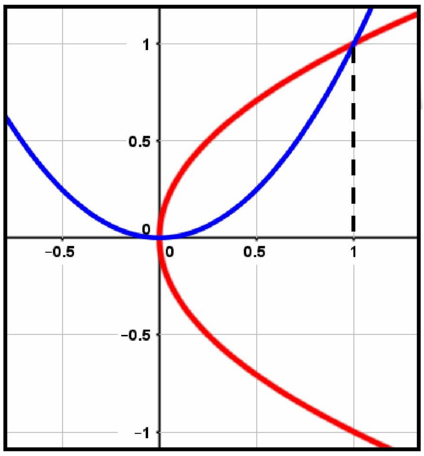
$$ع = \pi \int_{جـ}^{د} [س_١^٢ - س_٢^٢] \, ءص$$

أى $ع = \pi \int_{جـ}^{د} س_١^٢ \, ءص - \pi \int_{جـ}^{د} س_٢^٢ \, ءص$

مثـــال:

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = \sqrt{س}$ ، $ص = س^٢$ دورة كاملة حول محور السينات.

الحـــل:



لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنين نضع $ص_١ = ص_٢$

$\therefore \sqrt{س} = س^٢$ بتربيع الطرفين $\therefore س = س^٤$

$\therefore س^٤ - س = ٠$ $\therefore س(س^٣ - ١) = ٠$

$\therefore س = ٠$ أو $س^٣ = ١$ $\therefore س = ١$

$\therefore$ حدود التكامل $س = ٠$ ، $س = ١$

$\therefore ع = \pi \int_{٠}^{١} [ص_١^٢ - ص_٢^٢] \, ءس = \pi \int_{٠}^{١} [س - س^٤] \, ءس$

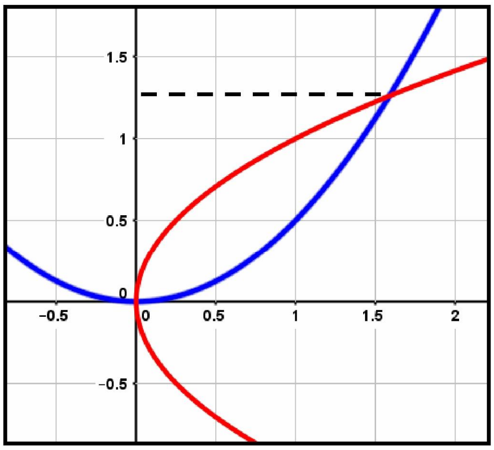
$$= \pi \left[\frac{١}{٢}س^٢ - \frac{١}{٥}س^٥\right]_{٠}^{١} = \pi \left(\frac{١}{٢} \times ١^٢ - \frac{١}{٥} \times ١^٥\right) = \frac{٣}{١٠}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

مثـــال:

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $٢ص = س^٢$ ، $ص = \sqrt{س}$ دورة كاملة حول محور الصادات.

الحـــل:

$\because$ الدوران حول محور الصادات ، $\because ٢ص = س^٢$ $\therefore س_١ = \sqrt{٢ص}$



، $\because$ ص $= \sqrt{\text{س}}$ $\therefore$ $\text{س}_2 = \text{ص}^2$

لإيجاد الإحداثيات الصادية لنقط تقاطع المنحنيين نضع $\text{س}_1 = \text{س}_2$

$\therefore$ $\text{ص}^2 = \sqrt{2\text{ص}}$ $\therefore$ $\text{ص}^4 = 2\text{ص}$

$\therefore$ $\text{ص}^4 - 2\text{ص} = 0$ $\therefore$ $\text{ص}(\text{ص}^3 - 2) = 0$

$\therefore$ ص $= 0$ أو $\text{ص}^3 = 2$ $\therefore$ ص $= \sqrt[3]{2}$

$\therefore$ حدود التكامل ص $= 0$ ، ص $= \sqrt[3]{2}$

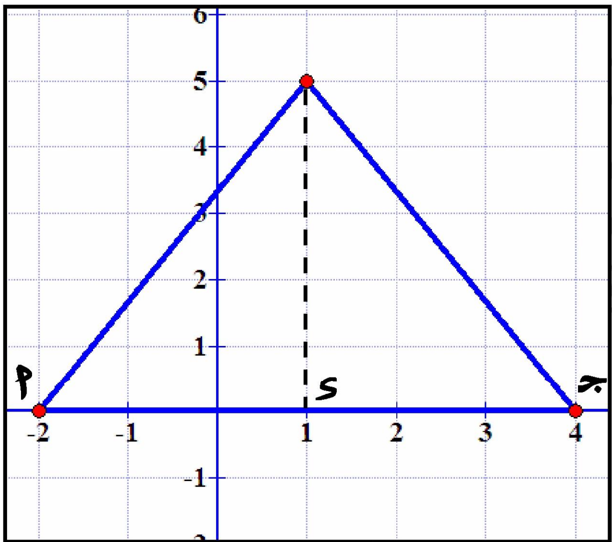
$$\therefore \text{ع} = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} \left[\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2\right] \text{ءص} = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} (2\text{ص} - \text{ص}^4)\, \text{ءص}$$

$$= \pi \left[\text{ص}^2 - \frac{1}{5}\text{ص}^5\right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \pi\left((\sqrt[3]{2})^2 - \frac{1}{5}(\sqrt[3]{2})^5\right) \simeq 0,95\,\pi$$ وحدة مكعبة

مثـــال:

إذا كانت النقط ٩(−٢،٠) ، ب(١،٥) ، جـ(٤،٠) رؤوس المثلث ٩ ب جـ فأوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث ٩ ب جـ دورة كاملة حول محور السينات.

الحـــل:



$\because$ ميل $\overline{\text{٩ب}} = \frac{5-0}{1+2} = \frac{5}{3}$

$\therefore$ معادلة $\overline{\text{٩ب}}$ هى $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \text{م}$

$\therefore$ $\frac{\text{ص} - 0}{\text{س} + 2} = \frac{5}{3}$ $\therefore$ $\text{ص}_1 = \frac{5}{3}(\text{س} + 2)$

، ميل $\overline{\text{جـب}} = \frac{5-0}{1-4} = \frac{-5}{3}$

$\therefore$ معادلة $\overline{\text{جـب}}$ هى $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \text{م}$

$\therefore$ $\frac{\text{ص} - 0}{\text{س} - 4} = \frac{-5}{3}$ $\therefore$ $\text{ص}_2 = \frac{-5}{3}(\text{س} - 4)$

$\therefore$ حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث ٩ ب جـ = حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث ٩بء

+ حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث بجـء

$\therefore \text{ع} = \pi \int_{-2}^{1} \text{ص}_1^2 \, \text{ءس} + \pi \int_{1}^{4} \text{ص}_2^2 \, \text{ءس}$

$\therefore \text{ع} = \pi \int_{-2}^{1} \left(\frac{5}{3}(\text{س}+2)\right)^2 \text{ءس} + \pi \int_{1}^{4} \left(\frac{-5}{3}(\text{س}-4)\right)^2 \text{ءس}$

$= \frac{25}{9}\pi \int_{-2}^{1} (\text{س}^2 + 4\text{س} + 4)\, \text{ءس} + \frac{25}{9}\pi \int_{1}^{4} (\text{س}^2 - 8\text{س} + 16)\, \text{ءس}$

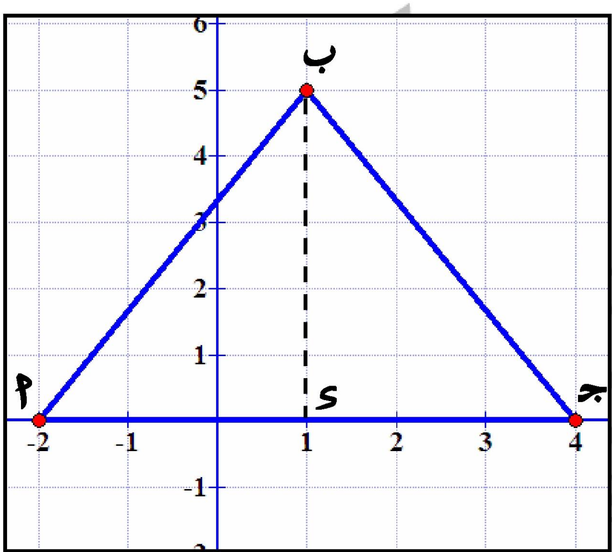
$= \frac{25}{9}\pi \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 + 2\text{س}^2 + 4\text{س}\right]_{-2}^{1} + \frac{25}{9}\pi \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - 4\text{س}^2 + 16\text{س}\right]_{1}^{4}$

$= \frac{25}{9}\pi \left(\frac{19}{3} + \frac{8}{3}\right) + \frac{25}{9}\pi \left(\frac{64}{3} - \frac{37}{3}\right) = 25\pi + 25\pi = 50\pi$ وحدة مكعبة

حل آخر:

$\because \text{بجـ} = \sqrt{(1-4)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{34}$ ، $\text{أب} = \sqrt{(1+2)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{34}$

$\therefore \text{جـب} = \text{بأ} \quad \therefore \Delta\text{بجـء} \equiv \Delta\text{بأء}$



$\therefore$ حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب جـ
= ضعف حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث بجـء

$\because$ ميل $\overline{\text{جـب}} = \frac{5-0}{1-4} = \frac{-5}{3}$

$\therefore$ معادلة $\overline{\text{جـب}}$ هى $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \text{م}$

$\therefore \frac{\text{ص} - 0}{\text{س} - 4} = \frac{-5}{3} \quad \therefore \text{ص} = \frac{-5}{3}(\text{س} - 4)$

$\therefore \text{ع} = 2 \times \pi \int_{1}^{4} \text{ص}^2 \, \text{ءس}$

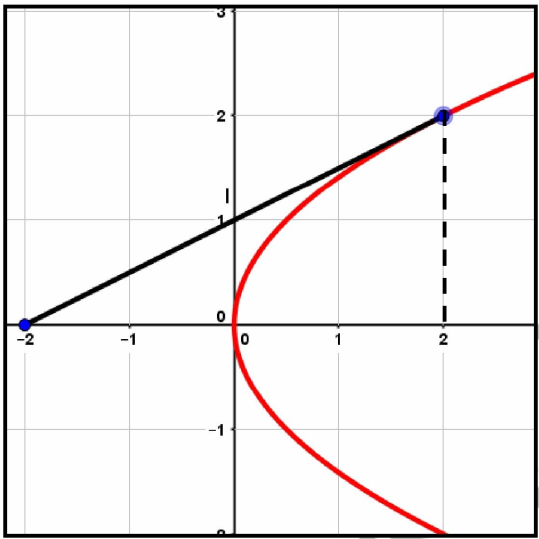
$\therefore \text{ع} = 2\pi \int_{1}^{4} \left(\frac{-5}{3}(\text{س}-4)\right)^2 \text{ءس} = \frac{50}{9}\pi \int_{1}^{4} (\text{س}^2 - 8\text{س} + 16)\, \text{ءس}$

$= \frac{50}{9}\pi \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 - 4\text{س}^2 + 16\text{س}\right]_{1}^{4} = \frac{50}{9}\pi \left(\frac{64}{3} - \frac{37}{3}\right) = 50\pi$ وحدة مكعبة

مثــــال:

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\text{ص} = \sqrt{٢\text{س}}$ ومحور السينات والمماس للمنحنى عند النقطة (٢، ٢) الواقعة عليه عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة حول محور السينات.

الحــــل:



$\because \text{ص} = \sqrt{٢\text{س}} \quad \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢\text{س}}} = \frac{١}{\sqrt{٢\text{س}}}$

عند النقطة (٢، ٢) $\quad \therefore$ ميل المماس $\text{م} = \frac{١}{\sqrt{٢ \times ٢}} = \frac{١}{٢}$

معادلة المماس هى $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٢} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \text{ص} - ٢ = \frac{١}{٢}\text{س} - ١ \qquad \boxed{\therefore \text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س} + ١}$

تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص = ٠ $\quad \therefore$ س = −٢

∴ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة

= حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المماس ومحور السينات من س = −٢ إلى س = ٢

− حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات من س = ٠ إلى س = ٢

$\therefore \text{ع} = \pi \int_{-٢}^{٢} \text{ص}_١^{٢}\, \text{دس} - \pi \int_{٠}^{٢} \text{ص}_٢^{٢}\, \text{دس}$ حيث $\text{ص}_١ = \frac{١}{٢}\text{س} + ١$ ، $\text{ص}_٢ = \sqrt{٢\text{س}}$

$$\therefore \text{ع} = \pi \int_{-٢}^{٢} \left(\frac{١}{٢}\text{س} + ١\right)^{٢} \text{دس} - \pi \int_{٠}^{٢} ٢\text{س}\, \text{دس}$$

$$= \pi \int_{-٢}^{٢} \left(\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + \text{س} + ١\right) \text{دس} - \pi \int_{٠}^{٢} ٢\text{س}\, \text{دس}$$

$$= \pi \left[\frac{١}{١٢}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}\right]_{-٢}^{٢} - \pi \left[\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \pi \left(\frac{١٤}{٣} + \frac{٢}{٣}\right) - \pi (٤ - ٠) = \frac{١٦}{٣}\pi - ٤\pi = \frac{٤}{٣}\pi \text{ وحدة مكعبة}$$